UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE XICOTEPEC DE JUÁREZ

Guía de estudio para propedéutico y examen de ingreso

Guía de estudio para propedéutico y examen de ingreso

Randolfo Alberto Santos Quiróz

22 de marzo de 2012

Presentación

Felicidades por decidir cursar tus estudios en nuestra Institución, una alternativa educativa cuya meta es contribuir a tu formación como individuo que participas en una sociedad de cambios constantes, donde tu futuro reclama niveles de excelencia y calidad acordes a los nuevos tiempos.

Un nuevo ciclo escolar se inicia y con él se abre la posibilidad de hacer un ameno y provechoso trayecto hacia el conocimiento, la reflexión, y la comunicación constante. La presente guía se elaboró con el propósito de proporcionarte un conjunto de elementos que te serán necesarios para llevar con éxito el curso propédeutico de habilidades matemáticas necesarias para ingresar a la Universidad Tecnológica de Xicotepec de Juárez.

El material didáctico presentado pretende auxiliar al facilitador en la tarea de introducir a los participantes del curso propedeútico en el estudio razonado significativo de las matemáticas. Para ello se basa en el conocimiento de que el alumno construye sus propios saberes a partir de dos condiciones:

- Sus conocimientos previos, ya sean formales o producto de su experiencias cotidianas, y
- situaciones que despierten su interés porque plantean un reto intelectual cuya solución está a su alcance.

La resolución de problemas constituye un acercamiento a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, y de las ciencias en general, que ha sido profundamente estudiada por investigadores de todo el mundo; se reconoce hasta el momento como un método eficaz para proporcionar un aprendizaje efectivo, de largo plazo y susceptible de extender y aplicar en situaciones muy diversas.

Los contenidos tratados en cada lección quedan explícitos desde el inicio, tanto para el facilitador como para el participante. Las lecciones constan de las siguientes partes:

SITUACIÓN PROBLEMA:

Se trata de plantear una situación en contexto conocida por el participante, ya sea escolar, familiar, lúdico, entre otras. La idea es motivar el interés del estudiante mediante una situación en la cual, si bien presenta un reto intelectual para él, sus conocimentos previos y el contexto familiar le sirvan como elementos para enfrentar ese reto. Las situaciones-problema pretender cubrir las distintas áreas de interés del alumno al presentarle temas relacionados con la escuela, con sus diversiones, con el hogar, además de otros temas de interés general.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Una vez presentada la situación-problema, esta sección pretende guiar el razonamiento del estudiante por uno de los dos caminos que lo lleven a la solución del problema. Se proponen preguntas de dificultad creciente, cuya respuesta debe conducir al joven a resolver el problema planteado. En todo momento se invita al alumno a intentar otro tipo de acercamientos y a discutir las soluciones obtenidas con sus compañeros y con su facilitador.

FORMALIZACIÓN

Esta seción contiene, de manera resumida y simple, los elementos del conocimiento establecido, sobre los cuales se fundamenta la disciplina; se trata de definiciones, algoritmos y explicaciones breves que ayudarán al participante a ubicar su comprensión del problema dentro del conocimiento científico universal. Aunque tal aspecto representa el contenido central de los textos tradicionales, en este documento corresponde sólo a una parte del acercamiento y no es, por cierto la más importante. Con ello se quiere reducir al máximo la tendencia a la memorización y al aprendizaje de corto plazo.

APLICACIÓN

En este punto se intenta diversificar los contextos de aplicación de los contenidos tratados en la lección, mediante problemas en situaciones más generales: ciencias, economía, salud, medio ambiente, etc. Se busca con ello contribuir en la construcción del concepto a partir de la confluencia de sus distintos significados. Esta sección puede servir de base al facilitador para evaluaciones del avance de las habilidades adquiridas de los participantes.

EJERCICIOS

Es la sección que pretende ejercitar ciertas habilidades y poner a prueba las estrategias de solución recientemente adquiridas por el participante, por medio de problemas semejantes tratados en la lección. Para algunos temas se incluyen también ejercicios de mecanización para motivar el desarrollo de habilidades computacionales o bien propuestas de investigación.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

¿QUÉ ES UNA COMPUTADORA?

Las lecturas complementarias son textos breves, comentarios sobre temas afines a los tratados en la lección tales como notas históricas, notas periodísticas, temas de matemática actual, curiosidades matemáticas o pasatiempos. Aunque esta sección constituye una parte opcional del material presentado en este manual, pretende auxiliar al facilitador a complementar los temas estudiados mostrando una visión globalizadora del conocimiento matemático.

Índice general

CAPÍTULO 1

TEMAS DE ARITMÉTICA

- Lecciones 1-2: Los números naturales y decimales
- Lección 3: Conteo
- Lección 4: Números primos y compuestos
- Lecciones 5-7: Fracciones
- Lecciones 8-9: Número con signo

1.1. Lección 1: TOMANDO DECISIONES

SITUACIÓN PROBLEMA:

Jaime y su familia están planeando una visita a los abuelos que viven en una población a 295 km de distancia. Para tomar la mejor decisión analizan las opciones que tienen:
Opción A: Usar el automóvil familiar. Éste puede alcanzar una velocidad promedio de 70 km/h, su rendimiento (es decir, los kilometros que pueden recorrer por cada litro de gasolina consumido) es de 10 km/l y el costo actual de la gasolina es de $3.12 por litro.

Opción B: Viajar en autobús. La velocidad promedio es de 50 km/h y el pasaje cuesta $21.50 por persona.

- ¿Cuál es la mejor decisión si lo que quieren es llegar rápido?
- ¿Cuál es la opción más barata? ¿Es independientedel número de viajeros?
- ¿Cuál es la mejor decisión si sólo va Jaime con su Padre? ¿Y si van el padre, la madre y los dos hijos?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. ¿Existirá una sola respuesta?, ¿de qué depende? Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1.- Sin hacer ninguna operación aritmética, haz una estimación del tiempo que se requiere para realizar el viaje en automóvil y en autobús. Recuerda, una estimación no es un resultado exacto, sólo nos da una idea de los valores aproximados. Piensa por ejemplo que la distancia que deben viajar es de casi 300 km, si el autobús recorre 50 kilómetros cada hora, en dos horas recorrerá 100 km, ¿cuánto tardará en recorrer los 300 km? Si el padre de Jaime tuviera que llegar muy rápido a casa de los abuelos, ¿cuál será la mejor opción?

2.- Analiza el tipo de operaciones que debiste realizar en el inciso anterior después de redondear la distancia y prueba esas mismas operaciones con los números exactos para calcular el tiempo de una y otra opción. ¿Se parecen tus resultados a los estimados?

3.- Si el automóvil recorre 10 kilómetros por cada litro de gasolina que consume, haz una estimación de cuantos litros necesitará para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitará para recorrerr 300 km? Recuerda las reglas para operar rápidamente con los múltiplos de 10 (10, 100, etcétera).

4.- ¿Qué tuviste que hacer para estimar el resultado anterior? Con el mismo razonamiento, calcula cuantos litros de gasolina se requieren para recorrer 295 km. ¿Cuánto costaría el trayecto si cada litro cuesta $3.12?

5.- ¿Cuánto costaría el viaje en autobús si sólo va una persona?, ¿si van dos? ¿Hasta cuántas personas conviene más una opción que otra?

6.- ¿Qué factores deben tomarse en cuenta para elegir una opción?, ¿crees que haya una única respuesta?

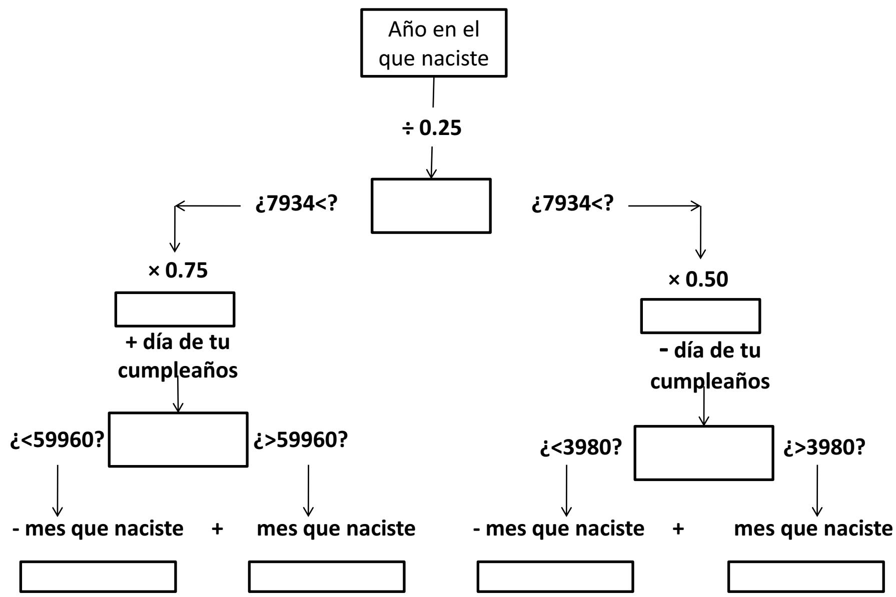
FORMALIZACIÓN

Muchas veces, optar por una elección conveniente en nuestras actividades cotidianas implica realizar unas cuantas operaciones aritméticas con números naturales y decimales. Ésta es una buena razón para que todos logremos habilidad para operar aritméticamente: estimando los resultados, aproximándolos o calculándolos de manera exacta; mentalmente, con lápiz y papel o usando una calculadora. Las matemáticas van a estar simpre presentes en tu vida. Sin embargo, las matemáticas no nos dan, por ellas mismas, todas las respuestas; éstas dependen de otros factores que no podemos traducir a términos matemáticos: nuestras necesidades, nuestros gustos, nuestras motivaciones, nuestros valores.

APLICACIÓN

¿Puede pensar una computadora?

Se ha dicho que las computadoras son “cerebros electrónicos”, capaces de pensar; porque en ocasiones pueden tomar decisiones. Estas decisiones están basadas en ciertas operaciones aritméticas que la computadora puede realizar. El siguiente juego da una idea cómo “decide” una computadora. Copia el diagrama y sigue las instrucciones que se indican. Compara tu resultado final con el de tus compañeros y discute con ellos por qué son diferentes.



EJERCICIOS

- ¿Qué números naturales pueden susutituir a a, b y c para que las operaciones siguientes estén correctas?, ¿son únicas las soluciones?

$$\begin{array}{cccc} & & & a \\ & b & b & b \\ + & b & b & b \\ & b & b & b \\ & b & b & b \\ \hline a & b & b & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & a & a & a \\ - & b & b & b \\ \hline & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & a & a & a \\ \times & & b & b \\ \hline & a & a & a \\ & a & a & a \\ \hline a & c & c & a \end{array}$$

- Empleando sólo cuatro veces el número 4 y una combinación de las cuatro operaciones aritméticas básicas, encuentra expresiones aritméticas para cada uno de los números naturales del 1 al 10. Por ejemplo, el número 6 se puede escribir como $6 = 4 + \frac{4+4}{4}$.

- La siguiente es la lista de ofertas del almacén de ropa Todo de mezclilla.

Prenda	**Precio regular** ($)	**Oferta** ($)
Camisetas decoradas	30.00	27.90
Pantalón de mezclilla	75.00	68.95
Suéter	62.50	56.75
Zapatos tenis	95.00	83.60
Calcetines	8.50	6.75

1. Si tienes $150.00 y quieres comprar dos camisetas y un pantalón:
   a) ¿Cuánto te costarían?
   b) ¿Cuánto ahorras con los precios de oferta?
   c) ¿Cuánto te sobra?
   d) ¿Qué puedes comprar con lo que te sobra?
2. Imagina que quieres comprar unos zapatos tenis, dos pares de calcetines y un suéter:
   a) ¿Te alcanzaría con $170.00? Da una respuesta rápida.
   b) Aproximadamente, ¿cuánto gastarías?
   c) ¿Cuánto te costarían si los compraras a precio regular?
   d) Si sólo tienes $100.00, ¿cuáles prendas de las que necesitas puedes comprar? ¿Es única tu respuesta?
3. ¿Cuánto gastarías si compras uno de cada uno?, ¿¿Cuánto ahorraría respecto al precio normal? ¿Cuánto ahorras por cada peso gastado?

LECTURA COMPLEMENTARIA:

¿QUÉ ES UNA COMPUTADORA?

Una computadora es un aparato electónico que procesa información. Existen computadoras enormes, capaces de realizar millones de operaciones simultáneamente y computadoras personales (también conocidas como PC) que se emplean en las oficinas, las escuelas y los hogares. A una computadora se le sumistran instrucciones y datos; la máquina procesa los datos de acuerdo con las instrucciones y produce un resultado. La computadora se utiliza para manipular muchas formas de información: datos numéricos, textos gráficas, música, sonidos, movimientos de imágenes, señales telefónicas, etc. Estos aparatos pueden realizar operaciones matemáticas con gran rapidez, trazar gráficas, dibujar figuras geométricas y moverlas en la pantalla. Los datos y las instrucciones originales se introducen a la computadora en un lenguaje especial, llamado *lenguaje de computación;* existen muchos de estos lenguajes, de los más conocidos son el *Java*, *C#*, *.Net*. Un *programa de computación* es una lista de instrucciones que la computadora debe seguir en orden al procesar los datos. A quienes se encargan de escribir estos programas de computación se les conoce como *programadores*. Sin embargo, muchos de estos programas se pueden adquirir comercialmente y quienes los usan en su PC no necesitan conocer ningún lenguaje de computación. Seguramente tú conoces algunos programas, hay juegos, libros interactivos, enciclopedias y programas para facilitar el estudio de las materias escolares. En una primera aproximación, las instrucciones que aparecen en el programa de computación se descodifican y ejecutan una por una en una unidad de procesamiento central conocida como CPU por sus siglas en inglés *(Central Processing Unit)*, la información y los resultados del proceso se almacenan en discos magnéticos que pueden estar fijos, dentro de la computadora, o bien pueden ser portátiles, lo que permite llevar la información de una computadora a otra.

1.2. Lección 2: LA REPRODUCCIÓN DE LAS AMIBAS

SITUACIÓN PROBLEMA:

Las amibas se reproducen dividiéndose en dos. Así, una amiba da origen, al dividirse, a dos amibas iguales; las cuales a su vez, cuando alcanzan cierto tamaño, se dividen y originan a cuatro amibas. En teoría, este proceso puede continuar indefinidamente si el medio es adecuado. Supón que el tiempo de división de las amibas es de un día, ¿cuántas amibas habrá al cabo de quince días si inicialmente había una sola amiba?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1. Haz una primera estimación de tu resultado, ¿habrá menos de 100 amibas?, ¿entre 100 y 1000?, ¿más de mil?

2. En cada etapa, ¿cómo es el número de amibas respecto a la etapa anterior?, ¿respecto a la siguiente?

3. ¿Qué operación debes hacer en cada etapa para obtener el número de amibas en la siguiente?

4. ¿Cuántas veces has repetido la misma operación en la tercera etapa?, ¿y el la octava?

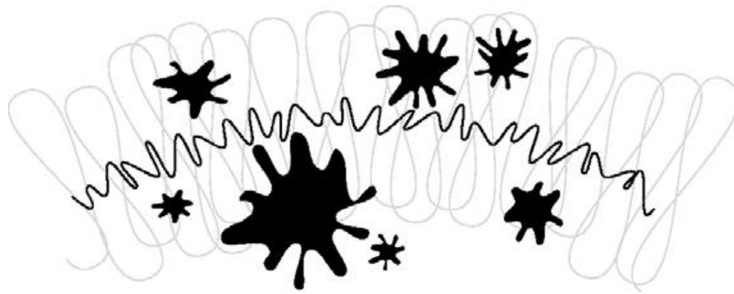
5. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo. Utiliza tu calculadora si es necesario.

Cuadro 2.1

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. de amibas	1	2									

6. Si llamamos t al número de días transcurridos, ¿puedes proponer una fórmula que exprese el número de amibas en ese tiempo? Pon a prueba tu fórmula usando los valores del cuadro 2.1.

7. Calcula cuántas amibas habrá después de 15 días.



FORMALIZACIÓN

La tabla empleada para resolver el problema anterior es una tabla de *potencias de 2*. Esto quiere decir que cada casilla en el renglón sobreado se obtiene multiplicando el valor anterior (de la izquierda) por 2. Decimos que 2 es la *base* y el número de veces que se ha tomado como factor esa base es el *exponente*; el resultado se llama *potencia*. Se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 2\times 2 \\ 2^3 &= 2\times 2\times 2 \\ 2^4 &= 2\times 2\times 2\times 2 \\ \ldots\text{etc.} & \end{aligned}$$

En general, la *potencia enésima* de un número cualquiera se obtien tomando *n veces* como factor de un número.

La operación contraria a la potencia de un número es su *raíz*.

Decimos que 2 es la raíz cuadrada de 4, porque $2^2 = 4$ y se escribe $\sqrt{4} = 2$. De la misma manera tenemos que:

$\sqrt[3]{8} = 2$, y se lee “la raíz cúbica de 8 es 2”

$\sqrt[4]{16} = 2$, y se lee “la raíz cuarta de 16 es 2”

En general, la *raíz enésima* de un número dado es el número que tomando *n* veces como factor, nos da el número dado.

APLICACIÓN

Cada vez menos

La *vida media* de un material radiactivo se define como el tiempo necesario para que una cierta cantidad de eses material se reduzca, por radiación, a la mitad. La vida media del polonio (material radiactivo) es de 138 días. Si hoy hubiera 1 kg de polonio en un laboratorio, ¿qué parte de esa cantidad quedaría dentro de cinco años?

1. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo. Recuerda que cada vez que transcurren 138 días, la cantidad de polonio se reduce a la mitad, entonces calcula el valor en cada casilla del primer renglón sumando 138 al valor de la casilla anterior.

Cuadro 2.2

Días transcurridos	0	138	276	414	552					
Cantidad restante	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$						

2. ¿Cómo se obtienen los valores del segundo renglón?, ¿cómo se encuentra la mitad de una cantidad?

3. ¿Es posible hablar del cuadrado de un número fraccionario?, ¿qué significaría? ¿Cómo obtendrías el cuadrado de $\frac{1}{2}$?, ¿y el de un $\frac{1}{3}$?

4. ¿Cómo clacularías $(\frac{1}{2})^2$?, ¿y el de $(\frac{1}{2})^3$?

5. Si la base es una fracción, ¿cómo varía la potencia al aumentar el exponente?

EJERCICIOS

- Puedes usar tu calculadora para encontrar las potencias de un número.

1. 5^4
2. 7^5
3. 9^3
4. 10^4
5. 8^6
6. 3^{10}
7. 6^4
8. 4^6
9. 11^3
10. 20^4
11. 13^2
12. 5^8

- Con tu claculadora también puedes encontrar la raíz cuadrada de un número. Si quieres calcular por ejemplo $\sqrt{125}$, oprimes en tu calculadora $125\sqrt{x} = 25$ ó $\sqrt{x}$ $125 = 25$. Calcula la raíz de las siguientes cantidades.

1. $\sqrt[2]{16}$
2. $\sqrt[3]{500}$
3. $\sqrt[5]{35}$
4. $\sqrt[4]{146}$
5. $\sqrt[2]{0.25}$
6. $\sqrt[9]{1.359}$
7. $\sqrt[2]{26.89}$
8. $\sqrt[2]{0.64}$
9. $\sqrt[7]{978}$
10. $\sqrt[3]{984}$
11. $\sqrt[2]{1.467}$
12. $\sqrt[8]{4587968}$

- Copia en tu cuaderno el cuadro 2.3 y complétalo usando tu calculadora.

Cuadro 2.3

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1.000	16		
2	4	1.414	17		
3	9	1.732			
4	16	2.000			
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

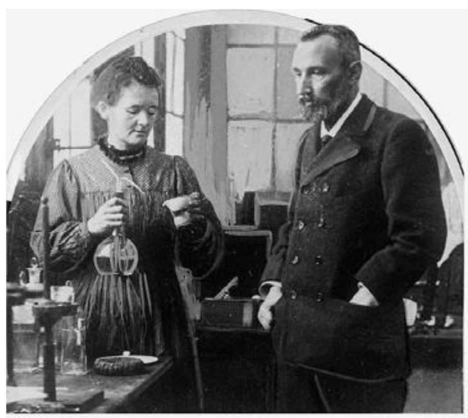
1. ¿Cuáles son los números que tienen raíz cuadrada entera?
2. Empleando el cuadro anterior, ¿puedes decir cuál es la raíz cuadrada de 100? ¿y la de 400?
3. ¿Cuántas cifras tiene la parte entera de las raíces cuadradas de números menores que 10?, ¿y de los números entre 100 y 1000?
4. ¿Entre qué valores enteros está el cuadrado de 2.5?, ¿y el de 3.5? No uses tu calculadora, sólo analiza el cuadro que completaste.
5. ¿Entre qué valores enteros está la raíz cuadrada de 350 ?, ¿y la de 650? No uses tu calculadora, sólo analiza el cuadro 2.3.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LA RADIOACTIVIDAD

La radioactividad fue descubierta por H. Becquerel en 1986 y fue Marie Curie quien usó ese nombre para designar aquellos materiales que se comportan como el radio. Los materiales radiactivos tienen la propiedad de emitir radiaciones de muy alta energía que pueden atravesar placas matálicas o ionizar gases. Esta radiación es espontánea, constante e independiente de las condiciones externas. La radiactividad es una propiedad atómica de los elementos y la energía liberada en una emisión radiactiva tiene su origen en la parte central del núcleo.

Al emitir radiación, el material se va desintegrando de manera que el número de átomos disminuye con el tiempo siempre en la misma proporción. Por ejemplo, si en un momento dado cuenta con 1000 átomos de un cierto material radiactivo, al cabo de un tiempo determinado, digamos una hora, encontraremos sólo 500; transcurrida una hora más, tendremos 250, y así sucesivamente; cada hora quedará la mitad de los átomos de la hora anterior. Al tiempo que tarda un material radiactivo en reducirse a la mitad se le llama *vida media* y es distinta para cada material. Por ejemplo, la vida media del polonio es de 138 días, la del radio es de 1620 años y la del radón, 3.28 días.



1.3. Lección 3: ¿QUÉ EDAD TIENEN?

SITUACIÓN PROBLEMA:

Dos amigos matemáticos, Andrés y Mauricio, se encontraron en la calle después de un largo tiempo de no verse. En la conversación surgieron estas preguntas:

M.– Pero dime Andrés, ¿te casaste?, ¿cuántos hijos tienes?

A.– Tengo tres niñas

M.– ¡No me digas!, ¿y qué edad tienen?

A.– Mira, la suma de sus edades es 13 y el producto es el número de la casa de enfrente. Tú lo puedes deducir cuáles son sus edades, ¿no?

M.– Oye no, me faltan datos …

A.– Tienes razón, olvide decirte que la mayor tiene ojos verdes.

M.– ¡Ah!, ahora sí ya se qué edades tienen.

- ¿Cómo pudo deducir Mauricio las edades de las hijas de Andrés?
- ¿Qué edad tienen las niñas?

Antes de leer lo siguiente, discute con tus compañeros de que manera podría resolverse este acertijo, aparentemente insoluble.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Escribe todas las combinaciones posibles de tres números cuya suma sea 13, cuida de no repetir combinaciones y de no omitir ninguna. Aquí hemos puesto las primeras:

$$\begin{aligned} 1+1+11 &= 13 \\ 1+2+10 &= 13 \\ 1+3+9 &= 13 \\ \ldots etcétera. \end{aligned}$$

2. Ahora, calcula, en cada caso, el producto de los tres números como lo hemos hecho con las primeras combinaciones:

$$
\begin{aligned}
1 \times 1 \times 11 &= 11 \\
1 \times 2 \times 10 &= 20 \\
1 \times 3 \times 9 &= 27 \\
\ldots etcétera.
\end{aligned}
$$

3. Observa cuidadosamente la lista de tus productos. ¿Hay algún caso en el que se obtenga el mismo resultado en dos combinaciones posibles? ¿Qué puedes deducir de ello?
4. ¿Tenía razón Mauricio, al decir que le faltaban datos?
5. ¿Cuál era el número de la casa de enfrente?
6. ¿Cuáles son las edades de las niñas?

FORMALIZACIÓN

Muchos problemas matemáticos, a primera vista absurdos o irresolubles, se pueden abordar de manera fácil analizando todos los posibles resultados. Resolver problemas de este tipo te ayudará a comprender mejor otros problemas que verás posteriormente. Por ejemplo, si se tienen tres letras, digamos **A, B y C**, y se quiere encontrar los arreglos que se pueden hacer con ellas tomándolas de tres en tres, sin repetir ningún arreglo, podemos elaborar una tabla que nos ayude a contar todos los posibles acomodos a estas letras y vigilar que no haya repeticiones. Empecemos, por ejemplo (primera columna) con los arreglos que empiezan con la **A**; la segunda columna contiene los arreglos que empiezan con **B** y, la tercera, con la **C**:

AAA	BAA	CAA
AAB	BAB	CAB
AAC	BAC	CAC
ABA	BBA	CBA
ABB	BBB	CBB
ABC	BBC	CBC
ACA	BCA	CCA
ACB	BCB	BCB
ACC	BCC	CCC

Una vez seguros que no se han repetido ni falta ningún arreglo, contamos las casillas resultantes. En este caso se tienen 27. ¿Puedes deducir una regla?, ¿cuántos arreglos son posibles con cuatro letras? ¿Cuántos arreglos diferentes pueden realizarse si se considran iguales dos que cuenten con los mismos elementos, aunque el orden sea diferente (por ejemolo AAC=ACA=CAA)?

APLICACIÓN

Otras combinaciones numéricas

Al multiplicar tres números consecutivos, cada uno de dos cifras, obtiene el número 19656, ¿cuáles son esos números?

1. Escribe dos números *consecutivos* de una sola cifra. ¿qué significa que dos números sean consecutivos?
2. ¿Cuáles son los tres números consecutivos más pequeños de dos cifras? ¿puedes decir, sin usar lápiz ni papel (ni calculadora), cuál es *aproximadamente* su producto?
3. ¿Cuáles son los tres números consecutivos más grandes de dos cifras? ¿puedes decir, sin usar lápiz ni papel (ni calculadora), ¿cuál es *aproximadamente* su producto?
4. De acuerdo con las respuestas anteriores, ¿consideras que los números buscados están más cerca de 10 que de 90?
5. Haz una prueba con los números 30, 31 y 32. su producto es ¿mayor o menor que 19656? (una primera aproximación la puedes obtener multiplicado $30 \times 30 \times 30$.)
6. ahora, intenta con 20, 21 y 22. ¿te acercas a la respuesta?
7. ¿Puedes decir ahora cuáles son los números buscados o necesitas otros ensayos?

EJERCICIOS

- Encuentra en cada caso tres números consecutivos cuyo producto sea:

  a) 635970

  b) 35904

  c) 110544

  d) 124950

  e) 21924

- Escribe los signos + o - en los espacios en blanco para que se cumplan las igualdades:

  1. 123□45□67□89=100
  2. 123□4□5□67□89=100
  3. 1□2□34□5□67□8□9=100
  4. 12□3□4□5□67□8□9=100

- ¿Cuántos números diferentes pueden formarse con las cifras de 4790 sin que se repita ninguna de ellas ? ¿Se deben eliminar algunas combinaciones?, ¿por qué?

- ¿De cuántas maneras se pueden cambiar \$50 en billetes si hay billetes de \$50, \$20 y \$10? Haz un diagrama para encontrar la respuesta.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

FINITO E INFINITO

Para contar los objetos que forman parte de una colección, decidimos en orden los números naturales, asignanado sucesivamente un número a cada objeto de la colección. Por ejemplo, para contar las vocales, decimos "A, 1; E, 2; I, 3; O, 4, y U, 5". Como al hacer esto recorremos el conjunto completo de las vocales, decimos que se trata de un conjunto finito; lo cual significa que contar las vocales tiene un fin, es el 5; o que el conjunto de vocales contiene 5 elementos.

$$\begin{array}{ccccc} A & E & I & O & U \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Sin embargo, esto no siempre ocurre, existen colecciones en las que cuando queremos contar sus elementos, no acabamos; por ejemplo, si pretendemos saber cuántos números pares hay, nunca terminaremos de contarlos:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 48 & \text{etc.} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \text{etc.} \end{array}$$

Decimos entonces que el conjunto de los números pares es infinito.

Los conjuntos infinitos presentan propiedades distintas a las de los conjuntos finitos; por ejemplo, si tomamos una parte de un conjunto finito, ésta siempre será menor que el conjunto total(cuatro vocales es menor que cinco vocales). Esto no sucede con los conjuntos infinitos. En el ejemplo anterior, los números pares conforman sólo una parte de los números naturales y, sin embargo, para contarlos necesitaríamos ¡todos los números naturales!

1.4. Lección 4: LA COLECTA

SITUACIÓN PROBLEMA:

Después de un año de colecta para comprar una computadora para la clase de matemáticas, el grupo de 2° decidió pasar su informe al maestro, con acertijo: "Hemos obtenido ganancias iguales a un número formado con cuatro dígitos distintos; ninguno de los dígitos tiene divisores distintos de 1 o de sí mismo, ninguno de los dígitos es sucesor de otro, y el número es el más grande que se puede formar con estos dígitos."

¿Cuál es el monto de la colecta?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Haz una primera estimación del monto de la colecta. ¿Crees que esté entre 1000 y 5000?, ¿entre 5000 y 9000? Argumenta tu respuesta.
2. Identifica los dígitos que no tienen divisores distintos de 1 o de sí mismos.
3. Copia en tu cuaderno el cuadro 4.1, complétalo y analiza cuáles son los números que cumplen cada una de las condicioenes impuestas. ¿Por qué es suficiente analizar sólo la divisibilidad hasta 4?
4. De acuerdo con el resultado de tu cuadro, ¿cuáles son los dígitos que no tienen divisores? De ellos, ¿cuáles son consecutivos?
5. ¿Puedes decir cuáles son los cuatro dígitos buscados?
6. Intenta formar cinco diferentes números con estos dígitos, compara tus números con los de tus compañeros. ¿Crees que hay muchos números diferentes cuyas cifras son estos cuatro dígitos?, ¿cómo cuántos?
7. Trata de formar el número más grande posible con los cuatro dígitos encontrados. ¿Cómo puedes estar seguro que es el más grande posible? Discútelo con tus compañeros.

Cuadro 4.1

Dígitos	Divisible ÷2	Divisible ÷3	Divisible ÷4	No tiene divisores distintos de 1 o de sí mismos
1				√
2				√
3				
4	2×2			
5				
6				
7				
8	$2 \times 2 \times 2$			
9		3×3		

FORMALIZACIÓN

Números primos y números compuestos

Un número entero mayor de uno que tiene exactamente dos divisores, 1 y él mismo, se llama *número primo*. El número 7 es un número primo porque sólo se puede dividir, de manera exacta, entre 1 y entre7.

Un número mayor de uno que tiene más de dos divisores se llama *número compuesto*. El 8 es un número compuesto porque es divisible entre 1, entre 8, entre 2, entre 4. Cada uno de los divisores de un número se llaman *factores*.

Un número compuesto siempre se puede escribir como el producto de números primos. Este producto se llama *factorización prima* del número. Una forma de encontrar la factorización prima es por medio de un diagrama de árbol:

24

2 12

2 2 6

2 2 2 3

$$24=2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

24

6 4

2 3 2 2

$$24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 3$$

La *factorización prima es única*, es decir siempre se llega al mismo resultado aunque se empiece con factores diferentes.

APLICACIÓN

El piso de mosaicos

I. ¿Cuántas diferentes superficies rectángulares se pueden cubrir con 20 mosaicos cuadrados?, ¿con 30?, ¿con los números entre 20 y 30?

1. Haz una conjetura respecto al número de posibles rectángulos que se pueden cubrir al aumentar el número de mosaicos. ¿Crees que entre más mosaicos puedes tener más rectángulos?

2. Copia en tu cuaderno el cuadro 4.2 y complétalo. ¿Por qué no hace falta continuar las columnas del cuadro?

3. Con los resultados de tu cuadro, ¿puedes decir qué divisores tienen en común el 21 y el 28? ¿Cuál es el máximo común divisor (m.c.d.)? ¿Y el 20 y el 24? Da una regla para encontrar el m.c.d. de los números cualesquiera.

4. ¿Cuáles son los factores primos de 26?, ¿de 27? ¿Cuáles son los números primos entre 20 y 30? ¿Puedes modificar la regla para encontrar el m.c.d. de dos números conociendo la factorización prima de los números dados?

Cuadro 4.2

No. de mosaicos	un lado=1	un lado=2	un lado=3	un lado=4	un lado=5	No. de combinaciones
20	1×20	2×10		4×5		3
21	1×21					
22	1×22					
23	1×23					
24	1×24					
25	1×25					
26	1×26					
27	1×27					
28	1×28					
29	1×29					
30	1×30					

II. Los alumnos del taller de teatro se reúnen por las tardes cada cinco días y los del coro cada cuatro días. Si coincidieron el último día del mes, ¿volveraán a encontrarse otro día del mes siguiente? ¿Cuántas veces coincidirán en los siguientes seis meses?

1. En el primer mes los días se reunirán los alumnos del taller de teatro son:5, 10, 15, 20, 25, 30(si no se trata del mes de febrero); es decir, son los múltiplos de 5. ¿Cómo se encontraron?

2. ¿Cuáles serán los días que se reúnan los alumnos del coro?, ¿se trata también de múltiplos? ¿de qué número?

3. ¿Puedes identificar múltiplos comunes de 4 y 5 en ese mes?, ¿cuáles son? ¿Hay uno o varios?, ¿y si estuvieramos pensando en dos meses siguientes? ¿Y en los seis meses siguientes?

4. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 4 y 5? Da una regla para encontrar el m.c.m de dos números cualesquiera.

EJERCICIOS

◇ Haz diagramas de árbol para identificar los factores primos de los siguientes números.

a) 17
b) 35
c) 46
d) 51
e) 63
f) 81
g) 59
h) 72
i) 23
j) 16
k) 37
l) 126
m) 213
n) 86
ñ) 47
o) 106

¿Alguno de éstos es un número primo?

◇ Enlista los números menores de 50 que tienen exactamente tres factores primos. Encuentra dos números mayores de 50 que tengan exactamente tres factores primos. ¿Puedes identificar una regla?

◇ El producto del m.c.d. y el m.c.m. de dos números es igual al producto de los dos números; por ejemplo, el máximo común divisor de 12 y 15 es 3 y el m.c.m. es 60:

$15 \times 12 = 180$

$3 \times 60 = 180$

◇ ¿Cómo podrías usar esta idea para encontrar el m.c.d. de dos números?

◇ Encuentra el m.c.m. de los números:

a) 5 y 8
b) 3 y 7
c) 12 y 10
d) 4 y 19
e) 3 y 12
f) 6 y 8
g) 5 y 16
h) 4 y 10
i) 25 y 28
j) 47 y 12
k) 2 y 8
l) 13 y 2

a) 5 y 8
b) 3 y 7
c) 12 y 10
d) 4 y 19
e) 3 y 12
f) 6 y 8
g) 5 y 16
h) 4 y 10
i) 25 y 28
j) 47 y 12
k) 2 y 8
l) 13 y 2

◇ Encuentra el m.c.d. de los números:

a) 16 y 24
b) 13 y 23
c) 44 y 11
d) 56 y 36
e) 27 y 81
f) 60 y 12
g) 39 y 13
h) 20 y 14
i) 90 y 45
j) 47 y 12
k) 20 y 36
l) 18 y 72

◇ Copia las letras que están en los casilleros con números primos y encontrarás un mensaje.

21	7	27	33	13	19	39	23	55	77	29	37	73	45	53
W	M	L	Y	U	Y	U	B	Ñ	H	I	E	N	G	!
57	11	41	103	63	1	69	25	17	99	47	67	15	307	43
J	A	V	A	B	N	F	X	Z	J	A	A	D	L	A
81	31	75	127	327	271	105	241	277	181	111	109	5	49	89
Z	S	Q	I	U	G	E	U	I	E	N	T	E	T	L
83	225	303	10	97	36	353	72	2	14	359	45	3	100	75
E	M	V	S	C	R	C	P	I	V	O	H	N	T	I

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LA CRIBA DE ERATÓSTENES

Hacia el año 230 a. C. el matemático griego Eratóstenes inventó un método para encontrar números primos, se llama la *Criba de Eratóstenes*. Supongamos que debemos aplicar este método para localizar los números primos entre 1 y 50. Primero escribimos todos los enteros entre 1 y 50, como se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

El método consiste en tachar todos los números que no son primos, es decir, aquellos que son múltiplos de otros. empezamos tachando el 1 y todos los múltiplos de 2 (es fácil, ¿no?, es una coluna sí y otra no). El siguiente paso es tachar todos los múltiplos de 3, después los de 4, luego los de 5, los de 6, etc. Al final, los números que quedan sin tachar, son todos números primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1.5. Lección 5: LA CARRERA LOCA

SITUACIÓN PROBLEMA:

En la fiesta de primavera se organizó una carrera en una pista recta, cumpliendo cinco etapas de acuerdo con las reglas siguientes:

Primera etapa: correr $\frac{4}{5}$ km en dirección de la meta.

Segunda etapa: correr $\frac{1}{3}$ km en dirección contraria.

Tercera etapa: $\frac{1}{4}$ km en dirección a la meta.

Cuarta etapa: $\frac{5}{6}$ km en dirección de la meta.

Quinta etapa: $\frac{4}{5}$ km en dirección contraria.

- ¿A qué distancia de la salidad se debe colocar la meta final?
- ¿Qué distancia recorrió cada competidor?
- ¿En alguna etapa el corredor queda antes de la salida?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Sin usar lápiz ni papel, haz una estimación respecto a la posición de la meta. Reagrupa tus datos de distintas formas para verificar tu respuesta.
2. Haz un diagrama a escala de la carrera, y señala dónde termina cada etapa.

3. ¿Puedes decir cuál es la distancia total que cada participante corre en dirección hacia la meta?
4. ¿Cuál es la distancia total corrida hacia atrás?
5. ¿Cuál es la diferencia entre estas dos distancias?, ¿a qué pregunta da respuesta este resultado?
6. ¿Cuál es la suma de las distancias corridas hacia delante y hacia atrás?, ¿a qué pregunta contesta este resultado?
7. Encuentra la posición de cada corredor al término de cada etapa.

FORMALIZACIÓN

Para sumar o restar varias fracciones es necesario expresarlas de manera que todas tengan el mismo denominador, para ello se busca el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de todos los denominadores y se encuentran las fracciones equivalentes que tengan como denominador el m.c.m. encontrado:

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{4}{5},$$

el m.c.m. es 60 (¿por qué?), por lo tanto las fracciones de la operación anterior son:

$$\frac{48}{60}-\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{50}{60}-\frac{48}{60},$$

a continuación se suman o restan, según sea el caso, los numeradores:
48-20=18; 18+15=33; 33+50=88; 88-48=40

y se pone el denominador comun: $\frac{40}{60}=\frac{4}{6}$

APLICACIÓN

El puesto de lotería

I. Para construir un puesto de lotería en la kermesse se necesitan los siguientes cortes de madera:

4 tiras de $1\frac{3}{4}$ m
2 tiras de $2\frac{1}{2}$ m
4 tiras de $\frac{3}{4}$ m
2 tiras de $\frac{2}{3}$ m

1. ¿Cuántos metros de tira de madera se necesitan en total? Una manera de efectuar la suma es transformando todas las fracciones a un mismo denominador. ¿Cuál sería el denominador?

2. Si la madera se vende en tiras de $2\frac{1}{2}$ m, ¿cuántas tiras se necesitan? ¿Cuál sería el desperdicio? Busca tu respuesta sin importar si se pueden realizar los cortes necesarios.

3. Haz un diagrama que muestre una posible distribución de los cortes para que el desperdicio sea mínimo. ¿Es única la respuesta? Compárala con las de tus compañeros, y discutan cuál es la mejor opción.

I. El automóvil del padre de Francisco tenía el jueves por la mañana $\frac{3}{4}$ de tanque de gasolina, si en un día normal de trabajo gasta $\frac{1}{8}$ de tanque y los fines de semana gasta $\frac{1}{10}$ de tanque, ¿cuánto tendrá al final del día?, ¿para cuántos días le alcanzará la gasolina?

4. Recuerda que para sumar o restar fracciones éstas deben tener igual denominador. Plantea la operación que debes realizar y ha haz las transformaciones necesarias para que tengan igual denominador.

5. ¿Con cuánta gasolina inicia el fin de semana?, ¿con cuánta lo termina?

6. ¿Puedes decir cuándo tuvo que llenar el tanque el señor?

7. ¿Serían iguales tus respuestas, sí el coche tuviera la misma cantidad de gasolina, $\frac{3}{4}$ de tanque, el lunes?

EJERCICIOS

◇ Realiza las siguientes operaciones.

1. $\frac{5}{7}+\frac{6}{4}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=$
2. $\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=$
3. $\frac{7}{8}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{5}{12}=$
4. $\frac{9}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{4}{5}-\frac{2}{7}=$
5. $\frac{6}{5}-\frac{1}{7}+\frac{4}{12}-\frac{3}{10}=$
6. $\frac{2}{9}-\frac{1}{18}+\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=$

◇ Martina ayuda a su mamá a confeccionar las cortinas para su casa. La sala tiene dos ventanas de $2\frac{1}{3}$ m de largo cada una, hay dos ventanas en cada recámara que miden $1\frac{1}{3}$ m de largo cada una, la casa tiene dos recámaras; y la ventana de estudio mide $1\frac{1}{2}$ m de largo. Para cubrir el ancho de cada ventana se necesitan dos tiras de tela. ¿Qué cantidad de tela deben comprar? Haz primero una estimación del total.

◇ ¿Cómo puedes decidir si una fracción es cercana a uno?, ¿cómo, si es cercana a cero?, ¿cómo si es cercana a $\frac{1}{2}$? Con las operaciones del ejercicio 1, redondea las fracciones a 0, 1 o $\frac{1}{2}$ y da resultados aproximados. Compara estas estimaciones con los resultados exactos que obtuviste en el ejercicio 1.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LAS PARADOJAS

Una paradoja es una proposición que lleva en sí misma su contradicción. Veamos, por ejemplo, una paradoja clásica.

Epiménides, poeta del siglo IV a. C., decía: “Todos los cretenses son mentirosos”, pero Epiménides era de Creta…¿Debemos creerle? Si es cierto lo que dice Epiménides, entonces es falso porque él es un cretense y está diciendo la verdad. Si, por el contrario, es falso lo que dice, entonces es cierto porque él como cretense es un mentiroso…

Otro ejemplo, ¿cómo reaccionarías si en la carretera encontraras un letrero que dijera: “No obedezca las señales” Si la obedeces, entonces no tienes que obedecerla y si no la obedeces, entonces, ¡tienes que obedecerla! ¿En qué quedamos?

Desde la antig*ü*edad hasta nuestros días, filósofos y matemáticos se han enfrentado a inumerables paradojas, muchas de las cuales son célebres. Algunas veces sólo responden a un juego, más frecuentemente ponene en evidencia alguna contradicción interna de la teoría. Pero siempre las paradojas nos ayudan a profundizar en ciertas nociones o a alcanzar nuevos conocimientos.

Fijate en esta paradoja que surge en esta suma infinita, los puntos suspensivos significan que la suma se repite igual indefinidamente:

$$1-1+1-1+1-1+1\cdots = A$$

Si agrupamos los sumandos de la siguiente forma,

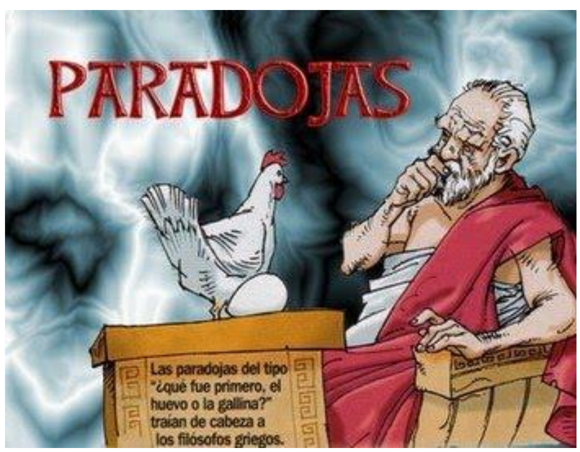
$$(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$$

la suma da como resultado A=0 porque cada paréntesis es igual a 0. Sin embargo, si agrupamos

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1$$

entonces A=1

¿Cuál es entonces el valor de A? o ¿es que 0=1?!!!!!



1.6. Lección 6: ¿NADA POCO O MUCHO?

SITUACIÓN PROBLEMA:

Ernesto debe entrenar entre 8 y 10 horas semanales para participar en el campeonato nacional de natación. Esta semana tuvo los siguientes entrenamientos por las tardes:

Día		**Total diario**
lunes	de $3\frac{1}{2}$ a $5\frac{3}{4}$	
martes	$2\frac{1}{4}$ h	$2\frac{1}{4}$
miércoles	$1\frac{1}{2}$ h	$1\frac{1}{2}$
jueves	de $2\frac{3}{4}$ a 4	
viernes	de $2\frac{1}{2}$ a $4\frac{3}{4}$	
Total		

- ¿Qué día entrenó más tiempo?
- ¿Entrenó el tiempo necesario para ir al campeonato?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Haz una primera estimación del tiempo total de entrenamiento de Ernesto. ¿Puedes decir, sin hacer los cálculos, si cumplió con el entrenamiento requerido?
2. Calcula cuánto entrenó en total entre lunes, jueves y viernes, ¿cómo se puede hacer?
3. Copia en tu cuaderno la tabla anterior y complétala, ¿cómo comparas dos fracciones?
4. ¿Cumplió Ernesto con los entrenamientos reglamentarios?

FORMALIZACIÓN

Para comparar fracciones se aplica el criterio de los productos cruzados: se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el denominador de la primera por el numerador de la segunda. Si el primer producto es mayor que el segundo, entonces la primera fracción es mayor que la segunda.

Por ejemplo, queremos saber si $\frac{3}{5}$ es mayor o menor que $\frac{2}{3}$, aplicando el criterio de los productos cruzados, veamos:

$$\frac{3}{5} \searrow \frac{2}{3} = 9; \qquad \frac{3}{5} \nearrow \frac{2}{3} = 10; \qquad 9 < 10$$

Como $9<10$, entonces la primera fracción, $\frac{3}{5}$, es menor que la segunda, $\frac{2}{3}$.

Cuando los productos cruzados son iguales, las fracciones son iguales, en este caso, las fraccciones se llaman *equivalentes*.

Con el método de los productos cruzados es posible encontrar información faltante. por ejemplo, si sabemos que

$$\frac{3}{5} = \frac{n}{20},$$

pero no conocemos el valor de n, podemos indicar los productos cruzados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 3 \times 20 &= 5 \times n \\ \frac{60}{n} &= 5 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

APLICACIÓN

Animales en peligro

I. Más de 800 especies de fauna silvestre se encuentran en peligro de extinción, aunque los científicos realizan esfuerzos por salvarlas no siempre tienen éxito. De las especies que aparecen en el cuadro siguiente, sólo en dos de los seis casos se ha logrado revertir la tendencia negativa.

1. Copia en tu cuaderno el cuadro 6.1 y encuentra en cada caso la fracción de la población de 1960 encontrada en 1980. Busca la fracción equivalente más simple en cada caso. Fíjate cómo se ha hecho en el primer renglón.

Cuadro 6.1

Especie	**Población 1960**	**Población 1980**	**Proporción de la población en 1980**
Gorila de montaña	15000	1000	$\frac{1}{15}$
Tigre de la India	7000	2000	
Grulla del Canadá	50	28	
Cóndor de California	60	50	
Antílope de África del Sur	311	900	
Alce del Tule	100	485	

2. Ordena de menor a mayor las proporciones de población de las especies. ¿Cuál es la que está en mayor peligro según los datos del cuadro (es decir, aquella cuya población ha mermado más)?

3. ¿Para qué especies se ha logrado revertir la tendencia? ¿Cómo se puede saber?

4. De seguir la misma tendencia, ¿qué pasaría con las poblaciones?

II. Rafael tiene un modelo a escala de un automóvil y quiere conocer las características del auto real. Según las indicaciones del juguete, el largo real del coche es de 285 cm, Rafael encuentra que el largo del modelo es de 25 cm. ¿Cuál sería el ancho del coche si el modelo mide 13 cm? ¿Cómo se puede saber cuáles son las otras dimensiones del coche real?

1. ¿Cómo puedes determinar, con los datos que se tienen, a qué escala está construido el modelo?, recuerda que todas sus partes deben guardar la misma proporción con las dimensiones reales correspondientes. La proporción está dada por medio de una fracción, encuéntrala y sustitúyela por la fracción equivalente más simple posible, ésta será la escala a la que está construido el modelo.

2. Usando la regla de productos cruzados para fracciones iguales, ¿podrías encontrar el ancho del auto real?, recuerda que la razón a la que debe estar con el ancho del modelo debe ser la misma que la escala que encontraste en el paso anterior.

EJERCICIOS

◇ En cada uno de los ejercicios siguientes, ordena de mayor a menor.

1) $\frac{2}{54}, \frac{4}{9}, \frac{4}{28}, \frac{8}{13}$

2) $\frac{7}{9}, \frac{6}{23}, \frac{9}{49}, \frac{3}{29}$

3) $\frac{2}{23}, \frac{8}{93}, \frac{9}{83}, \frac{12}{63}$

4) $\frac{18}{76}, \frac{74}{92}, \frac{25}{69}, \frac{3}{10}$

5) $\frac{1}{8}, \frac{91}{93}, \frac{74}{89}, \frac{23}{90}$

6) $\frac{18}{84}, \frac{83}{90}, \frac{29}{29}, \frac{94}{91}$

7) $\frac{29}{48}, \frac{49}{98}, \frac{39}{49}, \frac{40}{64}$

8) $\frac{15}{38}, \frac{84}{63}, \frac{29}{45}, \frac{95}{83}$

9) $\frac{84}{48}, \frac{49}{42}, \frac{85}{63}, \frac{29}{40}$

10) $\frac{375}{398}, \frac{274}{309}, \frac{128}{168}, \frac{458}{498}$

◇ Encuentra tres fracciones equivalentes en cada caso, señala cuál es la más simple de ellas.

1) $\frac{3}{5}$

2) $\frac{9}{15}$

3) $\frac{8}{3}$

4) $\frac{7}{63}$

5) $\frac{9}{57}$

6) $\frac{2}{8}$

7) $\frac{42}{49}$

8) $\frac{6}{9}$

9) $\frac{15}{35}$

10) $\frac{2}{5}$

◇ En cuatro días Emilia debe completar nueve horas de estudio. Si trabajó $3\frac{1}{2}$ h el lunes, $2\frac{1}{2}$ h el martes, $1\frac{3}{4}$ h el miércoles, ¿cuánto trabajó el jueves?.

◇ Para construir un panel para la exposición, Carlos y Cecilia necesitan tres piezas de $1\frac{3}{4}$ m de triplay tiene $3\frac{1}{2}$ m de largo, ¿podrán sacar de ahí las piezas que necesitan?

◇ De los 2500 corredores inscritos este año en la carrera de maratón, sólo $\frac{3}{4}$ partes la terminaron. ¿Cuántos corredores llegaron a la meta?

LECTURA COMPLEMENTARIA:

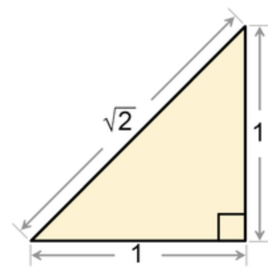
LA LEYENDA DE HIPASO DE METAPONTE

Un número racional es una fracción, es decir, un número que puede ser expresado como la razón de dos números enteros. Algunos ejemplos de números racionales son: 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{77}$ *o* 3.14($=\frac{314}{100}$). La antigua filosofía griega, llamada pitagórica en honor de Pitágoras, su fundador, suponía que todas las cosas podrían ser relacionadas con números enteros o con razones de números enteros. Los pitagóricos creían que los números estaban asociados a distintas cualidades del mundo real. Por ejemplo, para ellos 2 era el hombre y el 3 la mujer, 5 el matrimonio, 7 la salud. Descubrieron que en un instrumento que en un instrumento musical, la razón 2 a 1 en la longitud de cuerdas producía una octava, la razón 4 a 3, una cuarta, que son alagunas de las armonías más agradables al oído. Este descubrimiento es considerado el primero de la física-matemática.

Sin embargo, el más famoso teorema pitagórico afirma que en un triángulo cuyos catetos sean iguales a 1, la hipotenusa c debe satisfacer la ecuación

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Los pitagóricos descubrieron que c no puede ser un número racional, este descubrimiento causó tal conflicto en la filosofía pitagórica que, cuenta la leyenda, su descubridor, Hipaso de Metaponte, fue lanzado al mar en castigo y murió ahogado. Lo cierto es que el hecho causó una grave crisis en la filosofía pitagórica y su tesis principal tuvo que ser repensada.



1.7. Lección 7: LA NARANJADA

SITUACIÓN PROBLEMA:

Para preparar dos litros de naranjada se usan seis vasos de agua y dos vasos de jugo de naranja, si Carmela se toma un $\frac{1}{4}$ de litro de naranjada, ¿qué cantidad de jugo estará tomando?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Haz una conjetura, ¿crees que el jugo de naranja que se toma Carmela es más o menos que $\frac{1}{4}$ de vaso?, ¿por qué?

2. De acuerdo con el enunciado del problema, ¿puedes decir cuántos vasos de líquido hay en dos litros? Haz un dibujo que muestre los liquidos antes y después de mezclarlos.

3. ¿Cuántos vasos de líquido tiene un litro? Entonces, ¿qué fracción del litro es un vaso?

4. ¿Cuál es la fracción de jugo de naranja que hay en total de líquido? ¿por qué?

5. Suponiendo que el jugo de naranja está bien mezclado con el agua, ¿qué fracción de jugo de naranja hay en un litro?

6. ¿Y en un $\frac{1}{4}$ de litro?

FORMALIZACIÓN

La multiplicación de fracciones se aplica para calcular la fracción de una fracción. Para realizar la operación se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$$

La división de fracciones se aplica para saber cuántas veces cabe una fracción en otra. Para realizar la operación se sigue la regla de la multiplicación en cruz, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 3} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

APLICACIÓN

La carrera de relevos

I. Los alumnos de cuarto cuatrimestre de T.S.U. en en Tecnologías de la Información van a participar en una carrera de relevos. Si la longitud de la pista es de $3\frac{3}{4}$ km y hay relevos cada $\frac{1}{8}$ km, ¿de cuántos corredores está formado cada equipo?

1. Imagina una longitud de 3 km, ¿es más de la escuela a tu casa?, ¿menos?, ¿tienes alguna referencia de cuanto es 1 km?

2. Haz una primera estimación de cuántos corredores debe tener cada equipo, ¿menos de 10? ¿menos de 20? ¿más de 20?

3. ¿Cuántos cuartos hay en 3 km?,¿y en $3\frac{3}{4}$ km? Recuerda que un número entero se puede expresar como una fracción que tiene denominador 1. Por ejemplo, $3 = \frac{3}{1}$.

4. Si ya tienes $3\frac{1}{4}$ km expresado en cuartos, ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{8}$ en esa longitud?

5. ¿Cuántos relevos por equipo habrá en la carrera?

6. Si la longitud de la pista fuera de 25 km y se hicieran relevos cada $\frac{1}{5}$ km, ¿cuántos corredores tendría cada equipo?

II. Marcos estuvo $4\frac{1}{2}$ h en la escuela, $\frac{2}{3}$ de ese tiempo estuvo en clase y el resto, en el gimnasio. ¿Cuántas horas pasó en el gimnasio?

1. ¿Cuántas $\frac{1}{2}$ h hay en cuatro horas?, ¿y en $4\frac{1}{2}$ h?

2. Si Marcos hubiera estado la mitad del tiempo en el gimnasio, ¿cuántas horas hubiera estado ahí?

3. ¿Qué parte del total del tiempo estuvo en el gimnasio? ¿Cuántas horas son?

EJERCICIOS

◇ Copia en tu cuaderno las siguientes operaciones y completa los espacios en blanco, después simplifica los resultados.

1. $\frac{3}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{\square}{\square}$
2. $\frac{4}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{\square}{\square}$
3. $\frac{7}{9} \times \frac{\square}{5} = \frac{42}{45}$
4. $\frac{\square}{5} \div \frac{4}{13} = \frac{26}{20}$
5. $\frac{9}{24} \times \frac{6}{\square} = \frac{54}{192}$
6. $\frac{6}{14} \div \frac{\square}{5} = \frac{30}{42}$
7. $\frac{77}{88}\square\frac{3}{5} = \frac{385}{264}$
8. $\frac{14}{24}\square\frac{25}{36} = \frac{350}{864}$

◇ Copia en tu cuaderno cada uno de los cuadros siguientes y complétalos adecuadamente.

	$\times$	$\longrightarrow$	
$\div$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	
$\downarrow$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{7}$	

	$\times$	$\longrightarrow$	
$\div$	$\frac{6}{13}$	$\frac{5}{6}$	
$\downarrow$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{15}$	

	$\times$	$\longrightarrow$	
$\div$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	
$\downarrow$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{17}$	

1. Con una cuerda de $5\frac{5}{8}$ m se amarrarán varios paquetes, para cada uno se empleará $\frac{2}{5}$ m de cuerda. ¿Cuántos paquetes se pueden atar?, ¿qué tanta cuerda sobra?
2. “Multiplicar un número por un $\frac{1}{2}$ es igual a dividirlo entre 2”, compueba esta afirmación realizando algunas operaciones que te convenzan. ¿Puedes generalizar para otras fracciones?
3. “Dividir un número entre un $\frac{1}{2}$ es igual a multiplicarlo por 2”compueba esta afirmación realizando algunas operaciones que te convenzan. ¿Puedes generalizar para otras fracciones?
4. $4\frac{3}{4}$ kg de ensalada de frutas se va a colocar en platos de $\frac{1}{4}$ kg, ¿cuántos platos se necesitan?

LECTURA COMPLEMENTARIA:

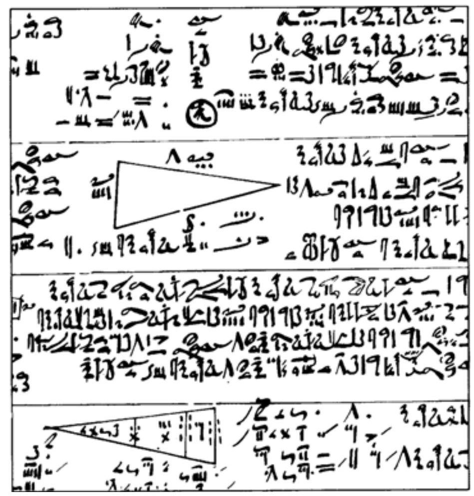
EL PAPIRO DE RHIND

Cuando vacacionaba por Egipto en 1858, Henry Rhind, un comerciante escocés, compró un rollo de pairo de casi 6 m de largo; cuando fue descubierto se le dió el nombre de Papiro de Rhind, se calcula que fue escrito en Egipto en el siglo $XVII$ a. C.

El papiro de Rhind es una muy importante fuente de información sobre la matemática egipcia. Contiene 85 problemas resueltos y algunos de ellos incluyen fracciones. Los egipcios usaban sólo fracciones unitarias (excepto $\frac{2}{3}$), que tenía un símbolo especial). Una fracción unitaria es una fracción que tiene 1 en el numerador. Por ejemplo, los egipcios podrían expresar la fracción $\frac{2}{5}$ como suma de fracciones unitarias: $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

O bien:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{3} & + & \frac{1}{15} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \frac{5}{15} & + & \frac{1}{15} & = & \frac{6}{15} & = & \frac{2}{5} \end{array}$$



1.8. Lección 8: COMPRA-VENTA DE AUTOS USADOS

SITUACIÓN PROBLEMA:

Martiniano es dueño de un negocio de compra-venta de autos usados. Para una marca determinada, los precios de compra y los de venta de los autos dependen del modelo, es decir del año en el que fueron fabricados. el cuadro 8.1 muestra algunos de estos precios por modelo, todos los autos son de la misma marca:

Cuadro 8.1

Modelo	**Compra ($)**	Venta ($)
1991	20 000	23 000
1992	23 000	27 000
1993	27 000	32 000
1994	32 000	38 000
1995	38 000	45 000

Al terminar el primer semestre del año, Martiniano revisa cuántos autos vendió y cuántos compró, para calcular sus ingresos totales. El cuadro 8.2 muestra los autos que Martiniano negoció por mes. Para distinguir los vendidos de los comprados, Martiniano puso un signo + a los vendidos (porque recibió dinero).

Cuadro 8.2

	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**Venta total**	**Compra total**	**Balance**
Enero		+1	-1	-1	-1			
Febrero	-1	-1	+2		-1			
Marzo	+1	-1	-2		+1			
Abril	+2		+1	-1	-1			
Mayo		-1	+1	+2	-1			
Junio	-1		+2	-1	+2			
Venta total								
Compra total								

Usando la información de los cuadros 8.1 y 8.2, contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuánto obtuvo por las ventas en enero? ¿Cuánto pagó por las compras? ¿Cuál es la diferencia?, ¿vendió más de lo que compró?
- ¿En qué mes se compró más autos?, ¿cuántos vendió en ese mes? ¿Cuál es la diferencia?
- ¿Cuál es el modelo que más ganancias le dejó? ¿Cuál es el modelo que más pérdidas le ocasionó?
- ¿Cuál es el balance (ganancias-pérdidas)semestral? ¿Tú crees que se trata de un buen negocio? ¿Cómo puedes explicar la evolución del negocio?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. En el cuadro 8.1 muestra que hay una diferencia entre el valor de compra y el de venta de cada modelo. ¿Puedes decir con cuál modelo obtiene mayores ganancias?

2. ¿Te parece una buena idea poner un signo - a las compras y un signo + a las ventas? ¿Por qué? ¿Qué significan estos signos cuando se traducen en pesos?

3. ¿Crees que todos los meses Martiniano obtuvo ganancias?, ¿por qué? Habrá algún mes en que haya más autos de los que vendió.

4. Sin usar lápiz ni papel, ¿puedes decir si obtuvo pérdidas o ganancias en el mes de enero?, ¿y en junio?

5. Reproduce el cuadro 8.2 en tu cuaderno susutituyendo el número de coches vendidos o comprados por la cantidad de pesos recibidos o pagados según sea el caso. en el cuadro 8.3 hemos puesto algunos ejemplos.

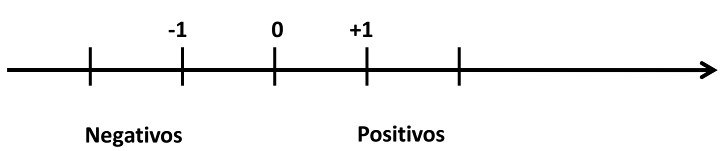
6. Con ayuda de tu cuadro contesta las preguntas del problema

Cuadro 8.3

	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**Venta total**	**Compra total**	**Balance**
Enero		+27 000			-38 000			
Febrero	-20 000		+64 000					
Marzo								
Abril	+46 000		+32 000	-32 000	-38 000	- 70 000	+ 78 000	+ 8 000
Mayo								
Junio								
Venta total								
Compra total								

FORMALIZACIÓN

Los números enteros pueden ser positivos (+) o negativos (-). En la representación de los números en la recta numérica, los números positivos se encuentran a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero. Decimos entonces que cualquier número positivo es mayor que cero y que cualquier número negativo es menor que cero.



La distancia que hay entre un número dado y el cero se llama *valor absoluto* de ese número, como la distancia es un número positivo, el valor absoluto siempre es positivo. Por ejemplo, el valor absoluto de +5 es +5 y el valor absoluto de -7 es+7.

Dos números con igual valor absoluto pero siganos contrarios se llaman simétricos. Por ejemplo, +5 y -5 son enteros simétricos.

Cuando se suman dos números enteros del mismo signo, el resultado es la suma de los valores absolutos con el signo de los sumandos:

$$(+6)+(+4)=+10$$
$$(+6)+(-4)=-10$$

Al sumar dos números enteros con signos diferentes se puede presentar alguno de los casos siguientes:

1. Cuando el número positivo es mayor *en valor absoluto* que el negativo, entonces la suma es positiva y su valor se obtiene restando el valor absoluto del número positivo menos el del negativo.

$$(+6)+(-4)=+2$$

2. Si el número negativo es mayor *en valor absoluto* que el positivo, entonces la suma es negativa y su valor se obtiene restando el valor absoluto del número negativo menos el del positivo.

$$(-6)+(+4)=-2$$

3. Cuando el número positivo es igual *en valor absoluto* al negativo, entonces la suma es cero.

$$(-6)+(+6)=0$$

Cuando se tiene una suma con varios sumandos de signos distintos, se suman todos los positivos y todos los negativos por separado y el resultado final será la diferencia de los valores absolutos de estas sumas, con el signo que corresponda según la regla enunciada arriba.

Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el simétrico del sustraendo, con las reglas dadas para la suma de enteros:

$$(+6)-(-4)=(+6)+(+4)=+10(+6)-(+4)=(+6)+(-4)=+2$$

APLICACIÓN

Los promedios del grupo

I. El cuadro 8.4 muestra las calificaciones de diez alumnos respecto al promedio del grupo, este número se conoce como la *desviación* del promedio. Los números positivos corresponden a los alumnos que tienen una calificación al promedio y los negativos, a los alumnos que están por debajo del promedo. La calificación más alta es 100.

Cuadro 8.4

Alumno	**Desviaciones con respecto al promedio del grupo**	**Calificación**
1. Armando	+7	72
2. Antonio	-20	
3. Andrés	-37	
4. Amanda	+18	
5. Aurora	-26	
6. Ana	0	
7. Abel	+15	
8. Ángel	-5	
9. Araceli	+4	
10. Artemio	+35	

II. Para ordenar las calificaciones de mayor a menor, recuerda que un número positivo es siempre mayor que uno negativo. ¿Cómo comparas dos números positivos?, ¿cuál es mayor?, ¿y dos números negativos?

III. Si la desviación es la cantidad que separa una calificación del promedio,¿cómo puedes calcular la calificación conociendo el promedio y la desviación? Completa el cuadro 8.4 como lo hicimos en el primer renglón. ¿Qué tienes que hacer si la desviación es positiva? ¿Y si es negativa?

IV. ¿Cómo se calcula el promedio de las calificaciones de un grupo? ¿Cómo se calcula el promedio de las desviaciones? ¿Qué diferencia hay entre estos cálculos? ¿Puede ser negativo el promedio de las calificaciones? ¿Y el promedio de las desviaciones?

EJERCICIOS

◇ Completa en tu cuaderno el cuadro 8.5, realizando las operaciones que se indican.

Cuadro 8.5

a	b	c	a+b-c	a-b+c
-21	+13	-25		
+34	-37	+48		
-15	-69	-93		
-18	+34	+50		
+68	-79	-93		

◇ Realiza las operaciones, primero hazlo con lápiz y papel, después verifica tus resultados con la calculadora.

1. $(-5)-(-7)+(+8)-(-2)-(+6) =$
2. $(+14)+(+36)-(-98)-(+47)+(+35) =$
3. $(+93)-(-104)+(-73)-(29)+(-84) =$
4. $(-287)-(+385)-(-476)+(-639)-(393) =$
5. $(-874)+(-763)-(+538)+(-398)-(-423) =$

◇ Después de alcanzar una altura de 3 795 m sobre el mar, un cohete suelta una de sus turbinas y ésta cae en el océano a una profundidad de -792 m. ¿Qué distancia recorre la turbina? ¿Por qué se emplean números negativos para indicar la distancia que se sumerge la turbina en el océano?

◇ Inventa un problema donde aparezcan los siguientes números como datos: -25, +47, y -12.

◇ Las siguientes son temperaturas alcanzadas en Alaska durante los diez días más fríos de un invierno muy crudo: -62 °C, -53 °C, -36 °C, -27 °C, -46 °C, -61 °C, -59 °C, -49 °C, -55 °C, -60 °C.

1. Ordena las temperaturas de mayor a menor.
2. Encuentra la temperatura promedio de estos diez días.

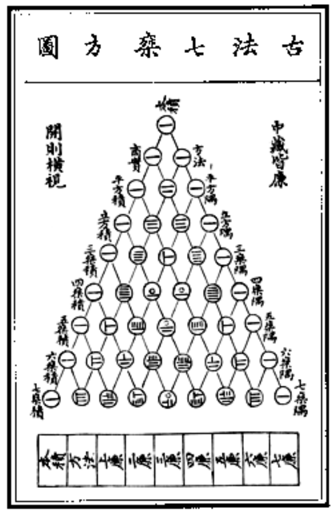
◇ Analiza las siguientes proposiciones y escribe delante de cada una si “algunas veces es cierto”, “siempre es cierto” o “nunca es cierto”. Da un ejemplo en cada caso para ilustrar tu respuesta. Discútelo con tus compañeros.

1. La diferencia entre dos números positivos es positiva…
2. La diferencia entre dos números negativos es negativa…
3. La diferencia entre un número y su simétrico es el doble del valor absoluto del número …
4. La diferencia entre 0 y un entero es el valor absoluto de ese entero …
5. La diferencia entre un número negativo y uno positivo es positiva …

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LA HISTORIA

Los números negativos tienen una historia larga y difícil. Aunque aparecieron como soluciones de ecuaciones desde el siglo III antes de Cristo, siempre se les rechazó porque se pensaba que no correspondían a soluciones adecuadas a los problemas prácticos. Los números negativos fueron llamados "absurdos" por Diofanto en el siglo III d. C. y por Michael Stifel, un algebrista alemán del siglo XVI; Cardano los llamó "ficticios" y para Descartes eran "raíces falsas". Los chinos usaron el prefijo "fu" delante de los números negativos, equivalente a nuestros prefijos "in" o "dis". Esto muestra que durante mucho tiempo los números negativos no fueron considerados verdaderos números.

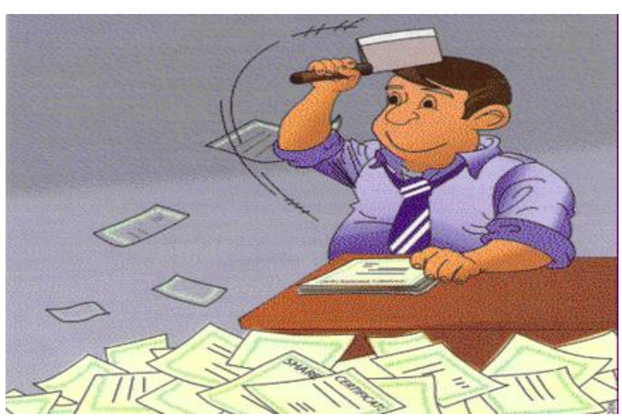


En el libro chino del siglo III a. C., llamado el *Chiu-chan suan-shu*, que significa *Los nueve capítulos del arte matemático*, aparecen ejemplos de ecuaciones con números negativos. Este libro también presenta, aparentemente por primera vez en la historia, las reglas para sumar y restar números positivos y negativos, éstas se encuentran enunciadas en forma indirecta porque no se usaban los signos + y -. Presentamos un extracto del *Chiu-chan suan-shu*:

Cuando se tienen que restar cantidades con igual signo, y las de signos distintos se tienen que sumar, si una cantidad positiva no tiene oponente, tómala negativa; y si una negativa no tiene oponente, tómala positiva. Cuando se tienen que restar cantidades de diferente signo y las del mismo signo se tienen que sumar, si una cantidad positiva no tiene oponente, tómala positiva; y si una negativa no tiene oponente, tómala negativa.

1.9. Lección 9: LA BOLSA DE VALORES

SITUACIÓN PROBLEMA:



La bolsa de valores reportó el movimiento de acciones de la semana pasada:

Las accciones de la compañía “El buen patín”	perdieron \$4.80 cada una.
Las acciones de la cadena “El taco teco”	ganaron \$2.25 cada una.
Las acciones de “Dulces caramelos”	perdieron \$1.55 cada una
Las acciones de “Benita bonita”	ganaron \$2.10 cada una
Las acciones de “Teleproducciones”	perdieron\$1.98 cada una
Las acciones del banco “La alcancía”	ganaron \$0.75 cada acción

- Si un accionista tenía 180 acciones de “El buen patín”, 125 de “El taco teco’, 113 de “Dulces caramelos” y 58 de “Benita bonita”, ¿cuál fue su balance de la semana?
- La semana pasada el accionista vendió 300 acciones de “Teleproducciones” y 500 de “La alcancía”, ¿cuál habría sido el resultado de esta semana si no las hubiera vendido?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

1. Sin utilizar lápiz ni papel ¿puedes hacer una primera estimación sobre si el accionista ganó o perdió? Justifica tu respuesta.
2. Haz un cuadro con la información de la bolsa de valores sobre los movimientos de las acciones de cada compañía, ¿cómo indicarías de una manera eficiente que unas acciones perdieron y otras ganaron?
3. Haz un cuadro con las pérdidas y ganancias del accionista, ¿cómo distingues en la tabla las cantidades ganadas de las perdidas?
4. Calcula el total de pérdidas y el total de ganancias, ¿ganó más de lo que perdió?
5. ¿Cuál es el balance (ganancias menos pérdidas) de la semana?
6. ¿Cómo sería ese balance si no hubiera vendido las acciones de “Teleproducciones”? ¿Y si hubiera conservado sólo las de “La alcancía”?

FORMALIZACIÓN

Las reglas de los signos

Para multiplicar o dividir dos enteros, se multiplican o dividen sus valores absolutos y el signo del resultado está dado por la siguiente regla:

Cuando se multiplican o dividen dos números enteros **positivos**, el resultado es un número **positivo**

Cuando se multiplican o dividen dos enteros **negativos**, el resultado es un número **positivo**

Cuando se multiplican o dividen dos enteros de **signos contrarios**, el resultado es **negativo**

Debe tomarse en cuenta que si se multiplica o divide un número entero cualquiera por -1, el resultado es un número simétrico.

APLICACIÓN

La cucaracha

"La cucaracha", como la canción, se mueve unos pasos para delante u otros pasos para atrás. Éste es un juego de mesa en el que participan 4 ó 5 jugadores. Se necesita un dado, el tablero de la página siguiente y una ficha por cada jugador. Cada jugador tira una vez el dado y avanza el número de casillas que obtuvo en la tirada. En la casilla en la que cae, aplica la operación indicada en la etiqueta al número que obtuvo en el dado y se mueve los lugares que indica el resultado obtenido. Ahí esperará nuevamente su turno.

Cuando el resultado es *positivo* el jugador se mueve en el sentido en el que aumenta la numeración (positivo). Si el resultado es *negativo*, cambiará el sentido del movimiento y se moverá en el sentido en el que disminuye la numeración (negativo); este sentido sólo vuelve a cambiar cuando el jugador obtiene de nueva cuenta un resultado negativo. Cada jugador debe recordar en que sentido se movió la jugada anterior. Gana el jugador que primero llega a la meta. El jugador que regresa a la salida vuelve a empezar el juego. Por ejemplo: si un jugador está en la casilla 29 y tira un 3 avanza tres lugares hasta la casilla 32, ahí debe multiplicar el 3 que obtuvo en el dado por (-4), obtiene -12; quiere decir que ahora se debe mover 12 lugares en sentido negativo, hasta la casilla 21 donde esperará su siguiente turno, recordando que su movimiento será negativo hasta que vuelva a caer en otra casilla con signo +.

	LA CUCARACHA								
1 $\times(+6)$	2 $\times(+7)$	3 $\times(+5)$	4 $\times(+5)$	5 $\times(+4)$	6 $\div(+1)$	7 $\times(-2)$	8 $\div(-1)$	9 $\times(+3)$	10 $\times(-1)$
11 $\div(-1)$	12 $\times(-2)$	13 $\div(+1)$	14 $\times(-2)$	15 $\times(-1)$	16 $\div(-1)$	17 $\times(+3)$	18 $\times(-2)$	19 $\div(-1)$	20 $\times(-1)$
21 $\div(-1)$	22 $\times(-3)$	23 $\div(-1)$	24 $\times(-3)$	25 $\times(-2)$	26 $\div(-1)$	27 $\div(-1)$	28 $\times(-4)$	29 $\times(+3)$	30 $\times(-2)$
31 $\div(-1)$	32 $\times(-4)$	33 $\times(+6)$	34 $\times(+7)$	35 $\div(-1)$	36 $\times(-2)$	37 $\times(-3)$	38 $\times(-1)$	39 $\times(-4)$	40 $\times(+5)$
41 $\times(-6)$	42 $\times(-4)$	43 $\div(-1)$	44 $\times(+5)$	45 $\times(-4)$	46 $\times(-3)$	47 $\times(-1)$	48 $\div(-1)$	49 $\times(+3)$	50 $\times(-2)$
51 $\times(+6)$	52 $\times(+9)$	53 $\times(-5)$	54 $\times(-3)$	55 $\times(+5)$	56 $\times(-2)$	57 $\times(+8)$	58 $\times(-1)$	59 $\times(-4)$	60 $\times(+7)$
61 $\times(-2)$	62 $\div(-1)$	63 $\times(-4)$	64 $\times(-6)$	65 $\times(-3)$	66 $\times(+7)$	67 $\times(-1)$	68 $\times(+7)$	69 $\times(-5)$	70 $\div(-1)$
71 $\times(-5)$	72 $\times(+8)$	73 $\times(-3)$	74 $\times(-1)$	75 $\times(+4)$	76 $\div(-1)$	77 $\times(-6)$	78 $\times(-4)$	79 $\times(-3)$	80 $\times(-1)$
81 $\times(-4)$	82 $\div(-1)$	83 $\div(-1)$	84 $\times(-5)$	85 $\div(-1)$	86 $\times(+4)$	87 $\times(-4)$	88 $\div(-1)$	89 $\times(-5)$	90 $\times(-2)$
91 $\times(-3)$	92 $\times(-2)$	93 $\times(-3)$	94 $\times(-4)$	95 $\times(+4)$	96 $\div(-1)$	97 $\times(-2)$	98 $\times(-5)$	99 $\times(-3)$	100 $\times(-4)$
META									

EJERCICIOS

- Realiza las operaciones que se indican.

1. $[(-4)\times(-6)]\div[(-2)\times(+5)]$
2. $(-4)\times[(-6)\div(-2)\times(+5)]$
3. $(-4)\times(-6)\div[(-2)\times(+5)]$
4. $[(-4)\times(-6)]\div(-2)\times(+5)$
5. $-[(-4)\times(-6)]\div(-6)[(-2)\times(+5)]$
6. $(-36.5)\times(-24.0)$
7. $(-36.5)\times(-24.0)$
8. $(-36.5)\times(+24.0)$
9. $(+36.5)\times(+24.0)$
10. $-(+36.5)\times(-24.0)$
11. $(+475.45)\div(+95.09)$
12. $(-475.45)\div(+95.09)$
13. $(+475.45)\div(-95.09)$
14. $(-475.45)\div(-95.09)$
15. $-(-475.45)\div(-95.09)$

- En el invierno la temperatura baja en promedio $15°C$ en un periodo de tres horas durante la noche. ¿Qué número expresa mejor el promedio de cambio de temperatura por hora? Discútelo con tus compañeros.

  1. $(+15) \div (+3)$
  2. $(-15) \div (-3)$
  3. $(-15) \div (+3)$

- La temperatura más baja que se ha registrado en el mundo es de $-89.2°C$, en la Antártida, y la más alta es de $+57.7°C$, en el norte de África. ¿Cuántos grados de diferencia hay entre estas temperaturas? La temperatura promedio entre estos dos extemos, ¿es positiva o negativa?

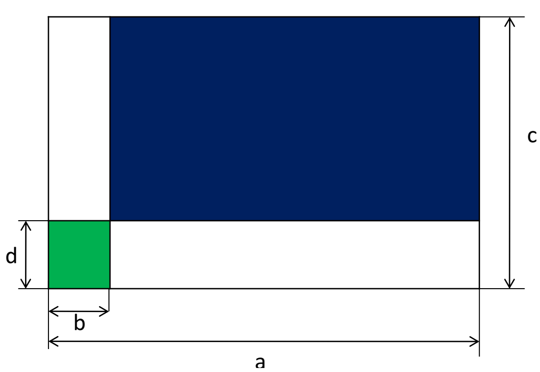
- Un buzo se sumerge hasta una profundidad de -21.3 m en seis minutos, ¿cuántos metros baja por minuto? ¿Por qué la profundidad se expresa en números negativos?

- Inventa un problema de pérdidas y ganancias donde aparezcan los siguientes datos: -150, +468, -74, -16, y debas hacer algunas multiplicaciones para resolverlo.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

UN ARGUMENTO GEOMÉTRICO

Las reglas para multiplicar números con signo pueden tener una justificación geométrica, como la que aparece en el Libro II de los *Elementos* de Euclides del siglo III a, C. y que reproducimos en la siguiente figura.



1. ¿Podrías explicar por qué esta figura permite obtener la fórmula;

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$$

2. ¿Te parece que se justifica la regla de los signos con esta figura?

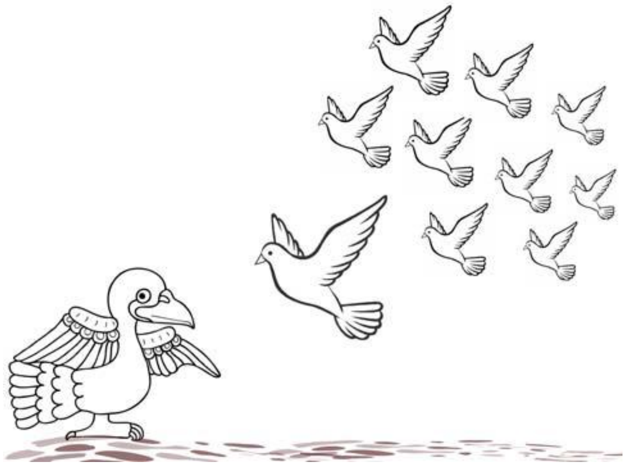
CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA

- Lecciones 1-3: Iniciación al lenguaje algebraico
- Lección 4: Ecuaciones lineales de primer grado
- Lección 5-6: El plano cartesiano
- Lecciones 7: Sistemas de ecuaciones lineales
- Lecciones 8-11: Operaciones con monomios y polinomios

2.1. Lección 1: ¡ADIÓS MIS 100 PALOMAS!

SITUACIÓN PROBLEMA:



-¡Adiós mis 100 palomas!
-dijo un gavilán a una parvada de palomas.
-No somos 100 -contestó la paloma mayor, y agregó- Éstas y otras tantas como éstas y la mitad de éstas y la cuarta parte de éstas y usted, señor gavilán, las 100 serán.

- ¿Cuántas palomas había en la parvada?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

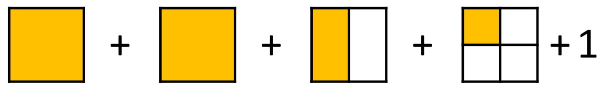
ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

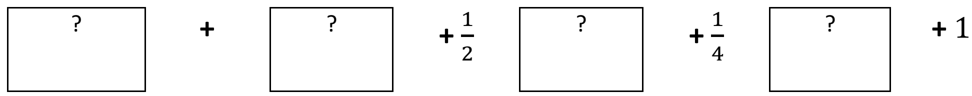
1. Sin usar lápiz ni papel, haz una estimación del número de palomas que había en la parvada. ¿crees que eran más de 50?, ¿entre 50 y 70?, ¿menos de 50?, ¿entre 20 y 50? Argumenta tu respuesta.

2. Imagínate la situación real y haz un dibujo de ella.

3. Ahora haz un diagrama en el cual muestres la situación matemática. Un dibujo y un diagrama no son iguales; el diagrama es un dibujo simplificado en que representamos, mediante marcas o símbolos simples, las relaciones matemáticas que hay en una situación real. El diagrama debe ayudarte a imaginar un camino para resolver el problema, por ejemplo, observa el siguiente diagrama y piensa si te ayudaría a resolver el problema. ¿Refleja la situación matemática?

4. Haz una conjetura sobre el valor buscado y ponla a pueba con el siguiente esquema, ¿cómo debe ser el número para que $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de ese número sean enteros?





Si tu resultado es mayor que 100, prueba con un número menor. Si obtuviste menos que 100, piensa en un número mayor.

5. ¿Se te ocurre otra manera de escribir la relacíon de arriba? ¿Se podría simplificar? Propón una forma de simplificarla.

6. ¿Cuál es la dificultad para realizar las operaciones que se indican en esa relación? ¿Te parece que puede haber un método para resolver este tipo de problemas?

FORMALIZACIÓN

Si en una expresión matemática aparece algún número desconocido, este número recibe el nombre de *incógnita*.

En álgebra se utilizan algunas letras (como *a, b, c,* ó *x, y, z*) para denotar las incógnitas dentro de una relación matemática. El uso de estas letras permite hacer operaciones sin que sepamos cuál es su valor y, a partir de estas operaciones, es posible determinar ese valor. Por ejemplo, la expresión

“Un número más su doble es igual a 90”

se traduce en *lenguaje algebraico* como

$$x + 2x = 90$$

El número (desconocido) se ha llamado x así que su doble será dos veces x, que escribimos “$2x$”. La suma del número más su doble se expresa como $x + 2x$ que debe ser igual a 90.

La expresión algebraica $x + 2x = 90$ se llama *ecuación*.

Cuando se tiene más de una incógnita, se emplean letras diferentes para denotarlas, por ejemplo:

“La suma de dos números es igual a 7”

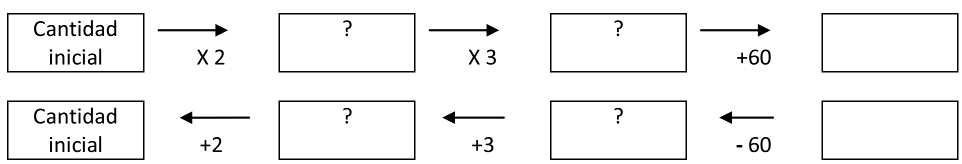
se escribe algebraicamente como $x + y = 7$.

APLICACIÓN

La caja registradora

I. Cuando Vicente inició su turno de cajero en Hamburguesas Mandonas, había cierta cantidad de dinero en la caja. Una hora después había el doble y dos horas después había el triple que una hora antes. Cuando un cliente pago $60.00, Vicente contó el total y encontró que había $300.00 ¿Cuánto había inicialmente en la caja?

1. ¿ Cuál es la incógnita en este problema?¿Cómo la puedes llamar?
2. ¿Cómo expresarías en lenguaje algebraico "el doble de una cantidad"?, ¿"y el triple de una cantidad"?
3. Encuentra una ecuación que exprese la situación del problema.
4. Idea una estrategia para encontrar el valor de la incógnita.
5. Hay muchos caminos para resolver una ecuación, el diagrama siguiente puede ayudarte a encontrar el valor de la incógnita, si inicias por la casilla de la derecha del segundo renglón. Explica cómo:



II. Si los cubos pesan 18.6 g cada uno, ¿cuánto pesan las esferas?

1. ¿Cuál es la incógnita en este problema?
   ¿Cómo la expresarías en lenguaje algebraico?
2. ¿Cuál es el peso total del lado derecho de la balanza?
   ¿Cuál debe ser el peso del lado izquierdo para que la balanza esté en equilibrio?
3. Escribe la ecuación correspondiente.
4. Sigue un esquema semejante al del problema 1 (La caja registradora) para resolver este problema.

EJERCICIOS

◇ Traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

1. Un número más su cuadrado.
2. El doble de un número menos su mitad.

3. La suma de dos números.
4. El doble de la raíz cuadrada de un número.
5. El cubo de un número.
6. La cuarta parte del cuadrado de un número.
7. El doble de un número más el triple de otro número diferente.
8. La suma de los cuadrados de dos números.

◇ Si v es la edad de Vicente, j la de Jaime y b de Benjamín, traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

1. La suma de las edades de Jaime y Benjamín.
2. La edad de Vicente menos la suma de las edades de Jaime y Benjamín.
3. La edad de Jaime hace cinco años.
4. La edad de Vicente dentro de diez años.
5. La edad de Benjamín hace siete años más la edad de Jaime hace cinco años.
6. La mitad de la edad de Benjamín menos el doble de la edad de Vicente.

◇ Traduce al lenguaje común las expresiones algebraicas siguientes:

1) $3a+2b$
2) a^2-a
3) $3x+2x+x$
4) $7-x$
5) $7-2x$
6) $4x-3y$
7) $2x-x$
8) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x$

◇ Escribe la ecuación correspondiente en cada caso y diseña una manera de resolverla.

1. Dos veces un cierto número más siete es igual a 19.
2. Tres veces la edad de Josefina más seis es igual a 45.
3. La mitad del precio de un globo más $5.00 es igual a $12.50.
4. El doble de un número menos 12 es igual a tres.
5. Un cuarto de cierto número es igual al símetrico de siete.
6. -3 veces un cierto número más ocho es igual a -1.
7. Cuando se resta un cierto número de 11 el resultado es 20.
8. Cuando se resta siete del doble de cierto número, el resultado es -25.

◇ El servicio metereológico informó que la temperatura de 22°C es menor en 4.2°C a la mitad de la temperatura promedio del día. ¿Cuál es la temperatura promedio?

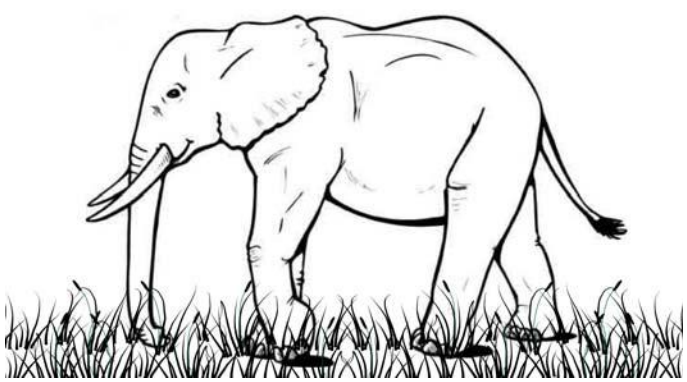
LECTURA COMPLEMENTARIA:

LAS MATEMATICAS ÁRABES

La palabra árabe *al-jabr*, de donde se deriva nuestra *álgebra*, aparece frecuentemente en textos matemáticos. El significado más común del término *al-jabr* es el de "restauración", aplicado a la operación de sumar términos iguales en ambos lados de la ecuación, y remover cantidades negativas. Tambien se usa como "restaurarüna cantidad que se quita de un lado de la ecuación, sumándola en el otro lado. Así, una operación en la ecuación $2x+5=8-3x$ que la transforma en $5x+5=8$, sería un ejemplo de *al-jabr*. Los problemas algebraicos con una o más incógnitas formaron parte de una rama de las matemáticas árabes dedicadas a la recreación. Uno de los ejemplos más famosos de esa época es el problema de las 100 aves que data aproximadamente del año 850 a.C.:
Las palomas se venden a cinco por tres rupias, las grullas, a siete por cinco rupias, los cisnes, a nueve por siete rupias y los pavos reales a tres por nueve rupias. ¿Cómo puede usted comprar 100 aves por un número exacto de rupias?

2.2. Lección 2: LAS MEDIDAS DEL ELEFANTE

SITUACIÓN PROBLEMA:



La trompa de mi elefante mide el doble de su cola y ésta es un cuarto de su cuerpo que, a su vez, mide el triple de su cabeza, que mide 1 m. ¿Cuánto mide mi elefante de la punta de la trompa a la punta de la cola? ¿Cuánto mide cada parte de su cuerpo en metros?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1. De todas las medidas que se dan, ¿cuál es la más pequeña?

2. Es conveniente usar la medida más pequeña como unidad de medida, ¿por qué?
3. Si llamas c a la medida de la cola y t a la medida de la trompa, escribe mediante una expresión algebraica la relación que hay entre c y t.
4. Completa el cuadro 13.1 encontrando a cuántas colas equivale cada una de las partes del elefante. ¿Para alguna parte necesitaste usar números fraccionarios? ¿para cuàl?

Parte del Elefante	**Medida “en colas"**
cuerpo	
cola	$1c$
trompa	
cabeza	
Total	

5. ¿Puedes decir ahora cuántas “colas"mide desde la punta de la trompa hasta la punta de la cola? ¿Cómo obtuviste ese número?
6. Si sabes que la cabeza mide 1 m, ¿cuánto medirá la cola? ¿Puedes decir ahora cuánto mide cada parte en metros?
7. Agrega una columna al cuadro 13.1 para las medidas en metros de cada parte del elefante, ¿cuánto mide en total?

FORMALIZACIÓN

La suma de varios números iguales se puede expresar de manera abreviada como una multiplicación, por ejemplo,

$$7+7+7+7+7+7=6\times 7$$

$$6 veces$$

De la misma forma, en álgebra, la suma de varias letras iguales se puede expresar de manera abreviada:

$$a+a+a+a+a+a=6\times a$$

$$6\ veces$$

Como la letra x se usa con frecuencia en álgebra para denotar una incógnita, cuando se tiene una multiplicación se omite el signo x y, en lugar de escribir 6 x a, se escribe *6a*. El número (6 en este caso)se llama *coeficiente*.

El producto de varios factores iguales se expresa de manera abreviada como una potencia, por ejemplo,

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times\ = 7^6$$

$$6\ veces$$

De la misma forma, en álgebra, el producto de varias letras iguales se puede expresar de manera abreviada:

$$a\ a\ a\ a\ a\ a\ = a^6$$

$$6\ veces$$

Al expresarlo como una potencia, el número (6 en este caso) se llama *exponente*.

Cuando hay varios sumandos que tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes, se suman los coeficientes. Por ejemplo:

$$3a^2b + 5a^2b - 2a^2b = 15a^2b$$

porque

$$3 + 5 - 2 + 9 = 15.$$

Esta operación recibe el nombre de “reducción de términos semejantes", porque los sumandos que tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes se llaman *términos semejantes*.

APLICACIÓN

Áreas y perímetros

I . Encuentra las fórmulas para calcular el área y el perímetro de cada una de las figuras sombreadas, suponiendo que los pequeños cuadros son todos iguales y tienen lado l:

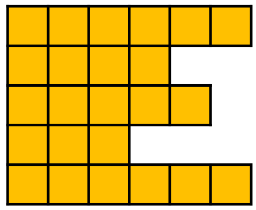
1. ¿Cómo se calcula el área de un cuadro de lado l? ¿Y su perímetro?

2. ¿Recuerda que el área de una figura es igual al número de unidades cuadradas necesarias para cubrirla. ¿Cómo expresarías el área de cada figura en términos del área de un cuadrito?

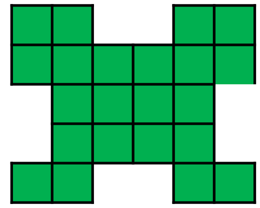
3. Recuerda que el perímetro de una figura es el número de unidades lineales necesarias para bordearla. ¿Cómo expresarías el perímetro de cada figura en términos de l?

4. ¿Puedes deducir alguna relación entre el área y el perímetro?

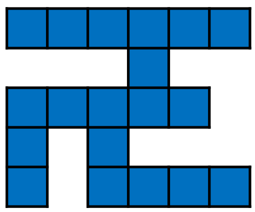
i.-



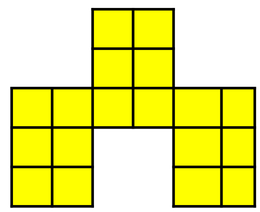
iii.-



ii.-



iv.-



EJERCICIOS

◇ Completa el cuadro 13.2, fíjate en los ejemplos.

Cuadro 13.2

Expresión completa	**Expresión simplificada**
a+a+a+a+b+b+5	4a+2b+5
-x-x-x-x-x-x+y+y+y+y	
aaaaaaaabbbccc	
	a^2b^5c
xxxyy+xxyyy-xy	
	x^2+3x+2
xxx+xxx+xxx+yy+yy	$3x^3+2y^2$
aaaa+aaaa+aaaa+aaaa+bb+bb	
aabbb+aabbb+aabbb+aabbb	
	$xy+x^2y+xy^2$
	$5ab+3a^2b$
xxxyyz+xxyyzz+xyyyz+xyz	

◇ Reduce los términos semejantes en cada una de las siguientes expresiones:

1. $3x+6x-5x+4x-3x+8x-2x$
2. $3ab+4ab+6ab+10ab$
3. $-5x^2+3x^2+6x^2-2x^2$
4. $4a+5b-3a+3b-4a+8b$
5. $9xy+3xz+2xy-5xz+4xy$
6. $7x^3y^2z-2x^3y^2z+5x^3y^2z-8x^3y^2z+3x^3y^2z-9x^3y^2z$
7. $2a^2b+3ab^2-8a^2b+5ab^2-7a^2b+3ab^2+8a^2b+6ab^2+7a^2b-3ab^2$

◇ En el negocio del papá de Rocío las ganancias de febrero fueron el doble de las de enero; las de marzo, las mismas que en enero y en abril, las mismas que en febrero. Las mayores ganancias se obtuvieron en mayo, cuando alcanzaron el triple que en enero; pero en junio descendieron e igualaron las de febrero.

1. Si llamamos x a las ganancias de enero, ¿cuál es la expresión algebráica para las ganancias de cada mes? ¿Y las de todo el semestre?
2. Si el total de ganancias en el primer semestre del año fue de $10 000.00, ¿cuáles fueron las ganancias cada mes?

LECTURA COMPLEMENTARIA:

ADIVINA ADIVINADOR O CÓMO SORPRENDER A TUS AMIGOS

Sorprende a tus amigos con los siguientes trucos

Truco:	**Ejemplo**
Piensa un número	16
Agrégale el entero	$16+17=33$
Súmale 7	$33+7=40$
Divídelo entre 2	$40\div 2=20$
Réstale el número que pensaste	$20-16=4$
¡El resultado es 4!	¿cómo supiste?

Para entener cómo funciona el truco, hagamos la traducción de cada paso al lenguaje algebráico:

Truco:	**Ejemplo**
Piensa un número	n
Agrégale el entero	$n+n+1=2n+1$
Súmale 7	$2n+1+7=2n+8$
Divídelo entre 2	$(2n+8)\div 2=n+4$
Réstale el número que pensaste	$n+4-n=4$
¡El resultado es 4!	¿cómo supiste? (porque el resultado es independiente de n)

Ahora prueba con distintos números en los siguientes trucos y después usa el álgebra para demostrar por qué funcionan.

Truco 1
Piénsa en un número
Súmale 5
Multiplícalo por 2
Réstale 4
Divídelo entre 2
Réstale el número que pensaste
El resultado es 3

Truco 2
Piénsa en un número
Súmale 10
Multiplícalo por 2
Súmale 100
Divídelo entre 2
Réstale el número que pensaste
El resultado es 60

2.3. Lección 3: CUESTIÓN DE ENFOQUE

SITUACIÓN PROBLEMA:

-Si tuviera el doble de las estampas que tengo, más las 50 de Chucho, tendría las mismas estampas que tú- le dijo Chayo a Mocho.
-¡Te equivocaste!, -contestó Mocho- porque yo tengo 160 y así sólo tendrías 110.
Pero ni Chayo ni Mocho se equivocan nunca al hacer las cuentas, ¿cómo pueden tener razón los dos?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y profesor.

1. Lee con cuidado la frase de Chayo e imagina la situación.
2. Si tuviera razón Chayo, ¿cuántas estampas crees que tendría? Haz una estimación: ¿Entre 20 y 50?, ¿entre 50 y 80?, ¿más de 100? ¿menos de 20?
3. Si tuviera razón Mocho, ¿cuántas estampas crees que tendría Chayo? Haz una estimación: ¿Entre 20 y 50?, ¿entre 50 y 80?, ¿más de 100? ¿menos de 20?
4. ¿Cómo puedes expresar algebraicamente la cantidad de estampas que tiene Chayo?
5. ¿Crees que Chayo calcula el doble de sus estampas antes de sumarlas a las de Chucho? ¿Cómo escribirías algebraicamente este cálculo?
6. Imáginate que tú tienes 40 estampas y que haces lo que dice Chayo, ¿cuántas estampas tendrías al final?
7. ¿Crees que Chayo calcula el doble de las estampas después de sumar las suyas a las de Chucho? ¿Cómo escribirías algebraicamente este cálculo?
8. Nuevamente, imáginate que tú tienes 40 estampas y que haces lo que dice Chayo, ¿cuántas estampas tendrías ahora?
9. ¿Hay una diferencia entre los resultados en los dos casos? ¿por qué?
10. ¿Puedes explicar por qué los dos amigos tienen razón?

FORMALIZACIÓN

Para evitar ambigüedades en las expresiones algebráicas empleamos los paréntesis. Los paréntesis indican el orden en el cual deben de realizarse las operaciones. Por ejemplo, la expresión

$$2+(x+3)^2$$

significa que debemos sumar 2 al resultado de elevar al cuadrado la suma x más 3.

Mientras que la expresión

$$(2+x)+3^2$$

significa que primero sumamos 2 más x y al resultado le agregamos el cuadrado de 3.
En los dos casos se obtienen números diferentes. Compruébalo poniendo $x=4$, para la primera expresión nos da 51 y para la segunda , 15.
Cuando se tienen que usar varios paréntesis, se emplean también los parentesis cuadrados [ ] y los corchetes { }. El orden en que deben realizarse las operaciones es: primero las operaciones entre paréntesis redondos ( ), después la de los paréntesis cuadrados [ ] y por último las operaciones entre corchetes. Por ejemplo:

$$\{2+2[(x+3)^2+5(x-1)]\}\div 4$$

Si no se presentan paréntesis, el orden en el que deben de realizarse las operaciones en el álgebra es: primero las potencias y las raíces; segundo multipliciones y divisiones; y tercero, sumas y restas.

¿Cuantos resultados?

APLICACIÓN

I. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas traduce la proposición: “El producto de multiplicar por 5 un número x elevado al cuadrado, más el doble de x menos 3 dividido entre 18 por x”?

1. $5x^2+2x-3\div 18x$
2. $5x^2+(2x-3)\div 18x$
3. $5x^2+[(2x-3)\div 18]x$
4. $5x^2+[2(x-3)\div 18]x$
5. $(5x)^2+[2(x-3)\div 18]x$
6. $(5x)^2+2(x-3)\div 18x$

II. Elige una opción y discúte con tus compañeros.

1. ¿Crees que son diferentes las seis expresiones anteriores?, ¿Por qué?
2. Si $x=1$, ¿cuánto vale la expresión (1)?, ¿y la (2)?
3. Calcula las cuatro expresiones restantes (de 3 a la 6), tomando el vlaor $x=1$, ¿qué encuentras?

4. ¿Dónde crees que está la ambigüedad?, ¿cómo debería escribirse la proposición para que no hubiera estas ambigüedades?
5. ¿Crees que haya otras expresiones algebraicas para la misma proposición?¿cómo cuales?

EJERCICIOS

◇ Pon, en cada caso, los paréntesis en los lugares adecuados para que se cumplan las siguientes igualdades.

1. $5+2\times 3=21$
2. $2+15-8\div 3=3$
3. $3+9\times 2-2=19$
4. $16-8-3=11$
5. $23-5\div 4=4.5$
6. $3\times 4+5+6=33$
7. $25-\times 2$
8. $6^2-5-2^2=35$
9. $1+2\div 3\times 4+5=9$

◇ Relaciona cada expresión de la columna de la derecha con la de la izquierda que mejor la traduzca.

1. x más y al cuadrado
2. el cuadrado de x más y
3. x alcuadrado más y
4. el cuadrado de x más y
5. x más y al cuadaro entre 2

i) x^2+y
ii) $(x+y^2)^2$
iii) $(x+y)^2$
iv) $x+y^2$
v) $\frac{(x+y)^2}{2}$

◇ ¿De cuántas maneras es posible agrupar las siguientes operaciones? ¿Cuáles son los posibles resultados suponiendo que $x=2$?

1. $3x+5-x^2-5x+3^2$
2. $4x^2-6x+3^2-2x-3x^2$

◇ Calcula las siguientes expresiones con los valores que se dan:

x	y	$(x+1)^2-(y^2+1)$	$(x+1)^2-y^2+1$	Resultado
2	1			
1	2			
1	1			
2	2			
0	0			
0	1			
1	0			

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LAS MATEMÁTICAS VISTAS POR LOS MATEMÁTICOS

Los números rigen el Universo

LOS PITAGÓRICOS

La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas

C. F. GAUSS

Una verdad matemática no es ni simple ni complicada, sólo es.

É. LIMOINE

Un matemático que no tenga algo de poeta, nunca será un matemático completo.

K. WEIERSTRASS

El matemático como el pintor y el poeta, es un creador de formas.

T. HARDY

La matemática es la creación más original del espiritú humano.

A.N. WHITEHEAD

La fuerza de las matemáticas está en su libertad.

G. CANTOR

El número rige el universo de la cantidad y las cuatro reglas de la aritmética son el equipo completo de los matemáticos.

J. C. MAXWELL

2.4. Lección 4: LA EDAD DE LAURITA

SITUACIÓN PROBLEMA:

El doble de la edad que tenía Laurita hace dos años es igual a la edad que tendrá dentro de tres años. ¿Cuántos años tiene ahora Laurita?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y profesor.

1. Haz una estimación de la edad actual de Laurita, ¿será más joven que tú?
2. Si conocieras la edad actual de Laurita, ¿podrías conocer la edad que tenía hace dos años?, ¿y la edad que tendrá dentro de tres años?
3. ¿Cómo puedes expresar, mediante una operación aritmética, tu edad de hace dos años?
4. ¿Cómo puedes calcular la edad que tendrás dentro de tres años?
5. ¿Cuál letra se emplea con frecuencia en el álgebra para expresar las cantidades desconocidas? ¿Para qué cantidad la usarías en este problema?
6. Escribe una expresión algebraica que exprese la edad de Laurita hace dos años.
7. Escribe una expresión algebraica que exprese la edad que tendrá Laurita dentro de tres años.

8. Ahora, traduce el enunciado del problema al lenguaje algebraico para formar una ecuación. No olvides poner los paréntesis necesarios.

9. Haz una estimación y ponla a prueba con la ecuación ¿Qué tan cerca quedaste de que se cumpliera la igualdad? Prueba con un número diferente.

10. ¿Puedes realizar las operaciones que se indican en la ecuación que encontraste en la pregunta 8? Recuerda el orden a seguir para realizar operaciones algebraicas.

11. Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita en la ecuación de la pregunta 8. ¿Puedes identificar los pasos de la solución en el siguiente esquema?

$$\begin{aligned} 2(x-2) &= x+3 \\ 2x-4 &= x+3 \\ 2x-4-x &= x+3-x \\ x-4+4 &= +3+4 \\ x &= +7 \end{aligned}$$

FORMALIZACIÓN

Para resolver una ecuación de primer grado que tine una incógnita, se siguen los siguientes pasos:

1. Eliminar los paréntesis realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= x+4 \\ 3x-6 &= x+4 \end{aligned}$$

2. Reunir los términos que tienen a la incógnita en el primer miembro de la ecuación, para lo cual se restan (o suman) de ambos lados de la ecuación los términos que convienen y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} 3x-6-x &= x+4-x \\ 2x-6 &= +4 \end{aligned}$$

3. Reunir los términos que no tienen a la incógnita en el segundo miembro de la ecuación, para lo cual se restan (o suman) de ambos lados de la ecuación los términos que convienen y se reducen los términos semejantes.

$$\begin{aligned} 2x-6+6 &= +4+6 \\ 2x &= +10 \end{aligned}$$

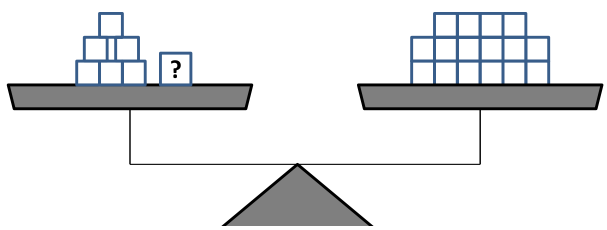
4. Si la incógnita está multiplicada (o dividida) por un número, se dividen (o multiplican) ambos miembros de la ecuación por el mismo número:

$$\begin{aligned} 2x &= 10 \\ 2x \div 2 &= 10 \div 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La balanza

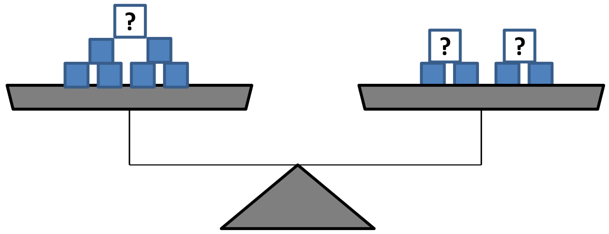
APLICACIÓN

I.- En cada una de las situaciones mostradas a continuación, la balanza está en equilibrio, los □ valen 1 y los $\boxed{?}$ son desconocidos. ¿Cuál es el valor de $\boxed{?}$ en cada caso?

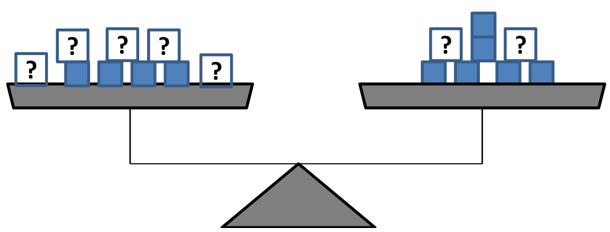


- ¿Tú crees que una $\boxed{?}$ pesa más o menos que un □? ¿Por qué?
- Del lado izquierdo de la balanza tenemos seis cuadritos unitarios y uno desconocido, lo podemos escribir algebraicamente como $6 + x$.
- Del lado derecho de la balanza tenemos 16 de cuadritos unitarios. Como la balanza está en equilibrio, el lado derecho es igual allado izquierdo, ¿cómo se escribe esto algebraicamente?
- Si quitas el mismo número de □ de ambos lados de la balanza, ¿se conserva el equilibrio? ¿Cómo escribirías esto algebraicamente? Dibuja una balanaza que muestre la nueva situación.
- ¿Puedes dejar solo $\boxed{?}$ en el platillo de la izquierda? ¿Cuántos □ necesitas dejar en el platillo derecho para que la balanza continué en equilibrio?
- ¿Cuánto debe valer entonces $\boxed{?}$?

- ¿Tú crees que una $\boxed{?}$ pesa más o menos que un □ ? ¿Por qué?
- Del lado izquierdo de la balanza tenemos cuadritos unitarios y uno desconocido, escribe esto algebraicamente.



- Del lado derecho de la balanza tenemos cuatro cuadritos unitarios y dos desconocidos. Como la balanza está en equilibrio, el la dorecho es igual al lado izquierdo, ¿cómo se traduce esto algebraicamente?.
- Si quitas el mismo número de □ de ambos lados de la balanza, ¿se conserva el equilibrio? ¿Cómo escribirías esto algebraicamente? Dibuja una balanza que muestre la nueva situación.
- Si quitas el mismo número de $\boxed{?}$ de ambos lados de la balanza, ¿se conserva el equilibrio? ¿Cómo escribirías esto algebraicamente? Dibuja una balanza que muestre la nueva situación.
- ¿Puedes dejar sólo los $\boxed{?}$ en alguno de los platillos de la balanza? ¿Cuántos □ dejar en el otro platillo para que la balanza continue en equilibrio?
- ¿Cuánto debe valer entonces un $\boxed{?}$?



- ¿Tú crees que una $\boxed{?}$ pesa más o menos que un □ ? ¿Por qué?
- Del lado izquierdo de la balanza tenemos cinco cuadritos desconocidos y cuatro unitarios, escribe esto algebraicamente.
- Del lado derecho de la balanza tenemos dos cuadritos desconocidos y seis unitarios. Como la balanza está en equilibrio, el lado derecho es igual al lado izquierdo, ¿cómo se traduce esto algebraicamente?.
- Si quitas el mismo número de □ de ambos lados de la balanza, ¿se conserva el equilibrio? ¿Cómo escribirías esto algebraicamente? Dibuja una balanza que muestre la nueva situación.
- Si quitas el mismo número de $\boxed{?}$ de ambos lados de la balanza, ¿se conserva el equilibrio? ¿Cómo escribirías esto algebraicamente? Dibuja una balanza que muestre la nueva situación.
- ¿Puedes dejar sólo los $\boxed{?}$ en alguno de los platillos de la balanza? ¿Cuántos □ dejar en el otro platillo para que la balanza continué en equilibrio?

- ¿Cuánto debe valer entonces $\boxed{?}$? ¿Cuál es la diferencia con los casos anteriores?
- Escribe con tus propias palabras una regla para resolver ecuaciones como las de la balanza.

EJERCICIOS

◇ Escribe la ecuación correspondiente en cada caso y encuentra lo que se pide.

1. Un número más su doble es igual a 36, ¿cuál es ese número?
2. La suma de dos números consecutivos es 27, ¿cuáles son esos números?
3. El doble de la suma de un número más su mitad es igual a 15, ¿cuál es ese número?
4. Un número más su doble, más su triple es igual a 72, ¿cuál el el número?
5. Cinco veces un número menos tres veces su mitad es igual a 21, ¿cuál es el número?
6. La edad de Mario hace cuatro años es igual a la mitad de la que tendrá dentro de seis años, ¿qué edad tiene Mario?
7. Dentro de un año, Amanda tendrá el triple de la edad que tenía hace nueve años, ¿qué edad tiene Amanda ahora?

◇ Encuentra el valor de la incógnita de cada una de la siguientes ecuaciones.

1. $x+15=18$
2. $5x+10=25$
3. $x+48=121$
4. $3x-2=2x$
5. $37=x-46$
6. $4+3x=4x+1$
7. $5x+15=8x$
8. $6x+8=16-10x$

◇ Encuentra el valor de la incógnita de cada una de la siguientes ecuaciones.

1. $4(x+1)=6(x+1)$
2. $2(8x-3)-7(x+1)=14$
3. $6-3(2x+5)=5x-14$

LECTURA COMPLEMENTARIA:

AL-KHWARISMI

Al-Khwarismi escribió, hacia el año 830 de nuestra era, un *Compendio del cálculo de al-jabr y de al-muqabala*. Esta obra es un tratado de álgebra básica en la lengua árabe, que influyó notablemente en la ciencia europea de la Edad Media gracias a las traducciones latinas que de ellas hicieron. El compendio centra su desarrollo en torno a la solución de seis tipos de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones escritas por Al-Khwarismi sin un lenguaje simbólico, equivalentes a las siguientes:

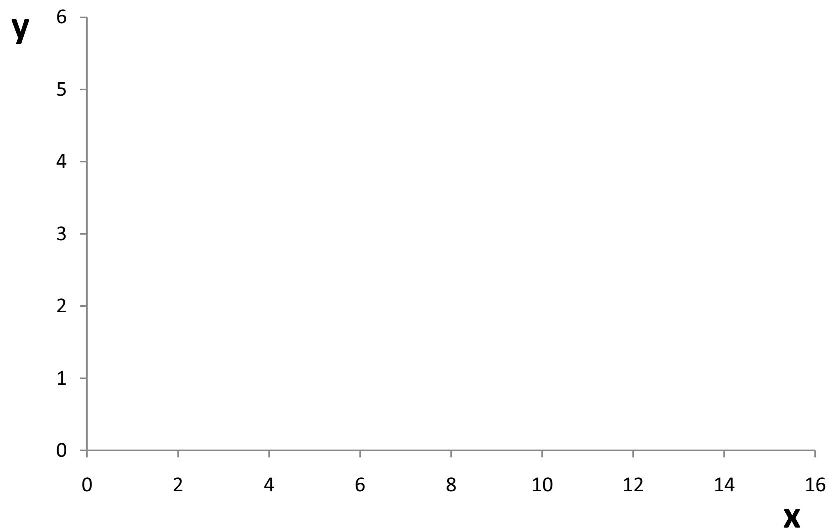
$$
\begin{aligned}
ax^2 &= bx & \qquad ax^2+bx &= c\\
ax^2 &= c & \qquad ax^2+c &= bx\\
bx &= c & \qquad bx+c &= ax^2
\end{aligned}
$$

Para resolver una ecuación, había que reducirla primero a uno de esos seis tipos; para ello, se utilizaban dos operaciones fundamentales que se dieron su nombre a los libros de álgebra y a esa misma ciencia. La operación de *al-jabr* es la introducción de los términos que deben sustraerse a unos de los miembros de la ecuación como términos para sumar al otro miembro. *Al-muqabala* es la reducción de los términos iguales que pertenecen a los dos miembros.

2.5. Lección 5: CAE A MENUDO, PERO NUNCA SE LASTIMA

SITUACIÓN PROBLEMA:

¿Qué es?



Localiza en el plano los siguientes puntos. Identifica a cada uno con su letra.

A(0,3), B(2,3), C(0,1), D(1,1), E(4,3), F(2,1), G(3,1), H(5,3), I(4,1), J(5,1), K(6,3), L(7,1), M(8,3), N(9,1), P(9,3), Q(10,1), R(10.5,2), S(11,3), T(11.5,2), U(12,1).

Para describir la respuesta al acertijo, traza los siguientes segmentos:
AC, CD, BF, FG, EI, HJ, IJ, KL, ML, NP,QS, SU, RT.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de continuar leyendo, imagina alguna manera de responder a la pregunta anterior.

1. ¿Cómo se localiza un punto en el plano?
2. Hay dos números para cada punto; por ejemplo $B(2,3)$, ¿qué significa cada uno de estos números?
3. En el plano, encuentra primero cuántos espacios o números a la derecha del cero debes moverte; después, a cuántos espacios o unidades hacia arriba del cero debes desplazarte para llegar al punto que deseas.
4. ¿Qué significa BF? ¿Ya localizaste en el plano los puntos B y F?

5. Después de haber trazado en el plano todos los segmentos que se te indicaron, ¿distingues algo, alguna palabra determinada por los segmentos?

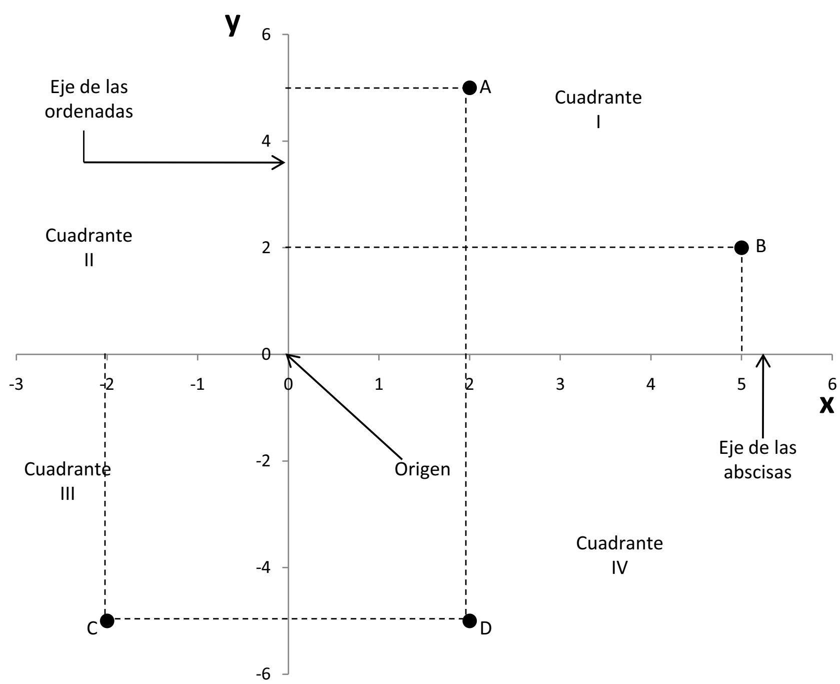
FORMALIZACIÓN

Un plano cartesiano es un plano en el cual se trazan dos rectas numéricas; en ambas se pueden representar, como lo hemos venido haciendo, cualquier número: positivo, negativo y cero, así como enteros, fracciones y decimales.

Las rectas se cortan el punto donde se representa el cero; este punto se conoce como *origen*. la recta horizontal se llama *eje de las abscisas* o de las *x*, y la vertical es el *eje de las ordenadas* o de las *y*.

El punto A tiene como coordenadas (2,5); no es lo mismo que (5,2), que representa al punto B, ¿Cuáles son coordenadas de los puntos C y D? C(,) D(,).

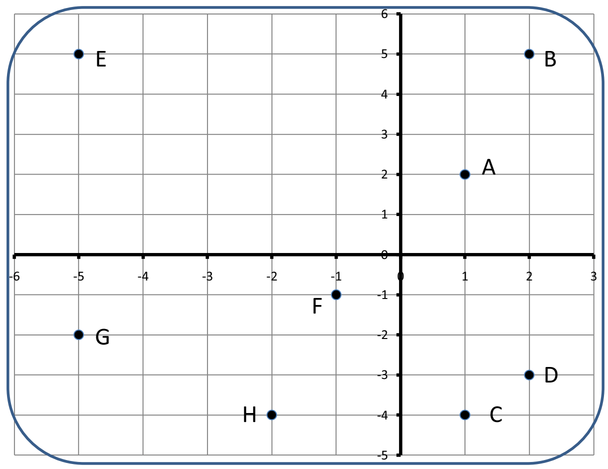
¿En qué cuadrantes están los puntos A_____, C_____ y D_____?



APLICACIÓN

El plano cartesiano que se muestra a continuación es la pantalla de radar de la torre de control de un aereopuerto. Los puntos de la pantalla representan posiciones de aviones.

La torre está situada en el origen. Cada división en los ejes de coordenadas representa 10 kilómetros. El norte está representados por la dirección positiva del eje y (hacia arriba), y el este por la dirección positiva del eje x (hacia la derecha en la pantalla)



¿En cuál cuadrante hay más aviones? ¿en cuál menos?

Las coordenadas del avión D son (20, -30) y las del H(-20,-40).

Escribe las coordenadas de los siguientes aviones: B_____, F_____, G_____, E_____.

La distancia entre los aviones A y C es de 60 kilómetros ¿Cuáles son las distancias que separan al E del G y al H del C?

Los aviones C y D están muy cerca uno del otro; otros dos aviones que también están cercanos entre sí son el H y el G. Si los cuatro viajana la misma velocidad y a la misma altura, y; a) G viaje al Este y H en dirección Norte, y b) D vuela al Norte, miestras que C lo hace hacia el Oeste.

¿Alguno de esos dos pares de aviones está en peligro de chocar; por lo tanto habría que avisar a alguno de ellos que cambie de rumbo o de altitud?

Un avión se reporta a la torre de control, indicando que se d irige al aeropuerto. Al parecer por primera vez en la pantalla, sus coordenadas son (60,30); represéntalo en la pantalla con la letra J.

EJERCICIOS

◇ Arturo vive en el estado de Puebla. Viajará a la ciudad de México próximamente, pues desea asistir a la Feria del Libro que se llevará a cabo en el Palacio de Minería. Sin embargo, no conoce muy bien la ciudad.

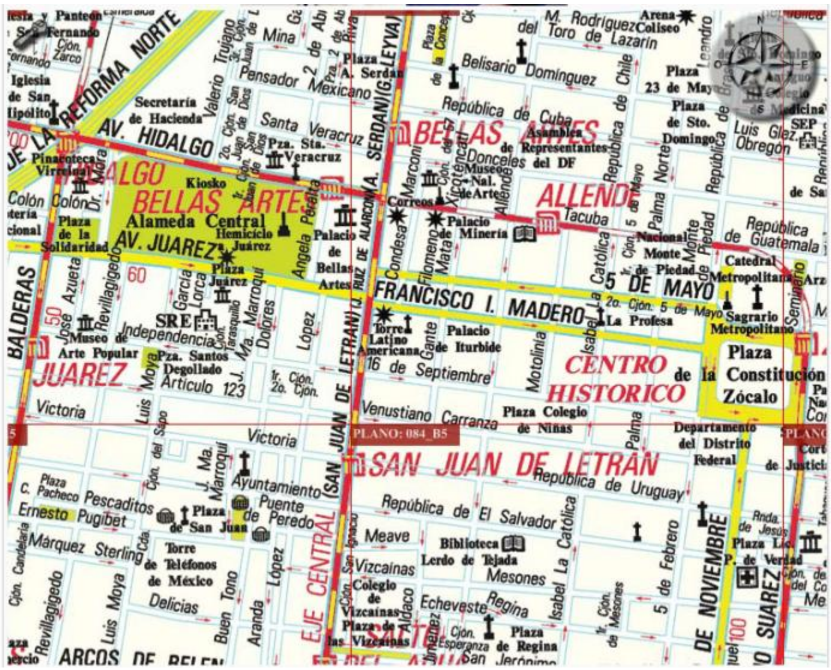
Le prestaron un plano de una parte de la ciudad de México donde aparece el Palacio de Minería.

¿Cómo puede Arturo encontrar el Palacio de Minería en el plano?.

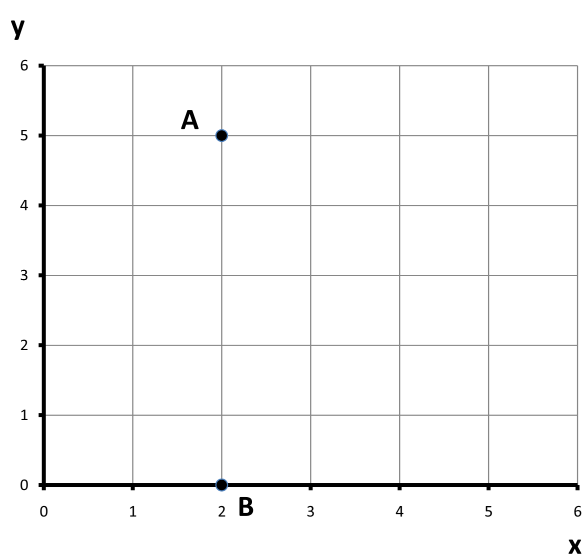
¿Dónde se localiza en el plano la estación Bellas Artes del Metro?

Al ver el mapa, Arturo se dio cuenta que están cerca otros lugares que a él le gustaría visitar, como la Torre Latinoamericana, el Palacio de Bellas Artes y la Alameda Central. ¿Dónde se localizan estos puntos en el plano?

Además de localizar en el plano los sitios que le interesa visitar, ¿qué otras cosas tendrá que hacer Arturo para ir de un lugar a otro?



◇ Escribe las coordenadas de los puntos A y B que están localizados en el plano cartesiano siguiente. ¿Cuál coordenada es igual para ambos puntos, la abscisa o la ordenada?



1. Localiza un tercer punto C, de manera que al unir los tres puntos obtengas un triángulo isóceles, ¿cuál es el área de tu triángulo?

   Escribe las coordenadas: C(,).

   Compara tus resultados con los de tus compañeros, ¿qué observas en el conjunto de resultados de todo el grupo?, ¿cuál coordenada tienen todos igual, y cuál puede ser?

   Si deseo localizar el tercer punto en (2,2) ¿se formaría un triángulo?
2. Ahora localiza un tercer punto, para obtener un triángulo rectángulo.
3. ¿Dónde se localizarían otros dos puntos, de manera que la figura que resulte al unirlos sea un rectángulo? Escribe las coordenadas de tus dos puntos. Nuevamente compara tus resultados con tus compañeros.
4. ¿En qué cuadrantes quedaron tus figuras de los puntos 1, 2 y 3? Dibuja otras, de manera que obtengas dos triángulos isóceles, uno en el cuadrante I y otro que tenga puntos en dos cuadrantes; lo mismo para tu triángulo rectángulo y tu rectángulo.

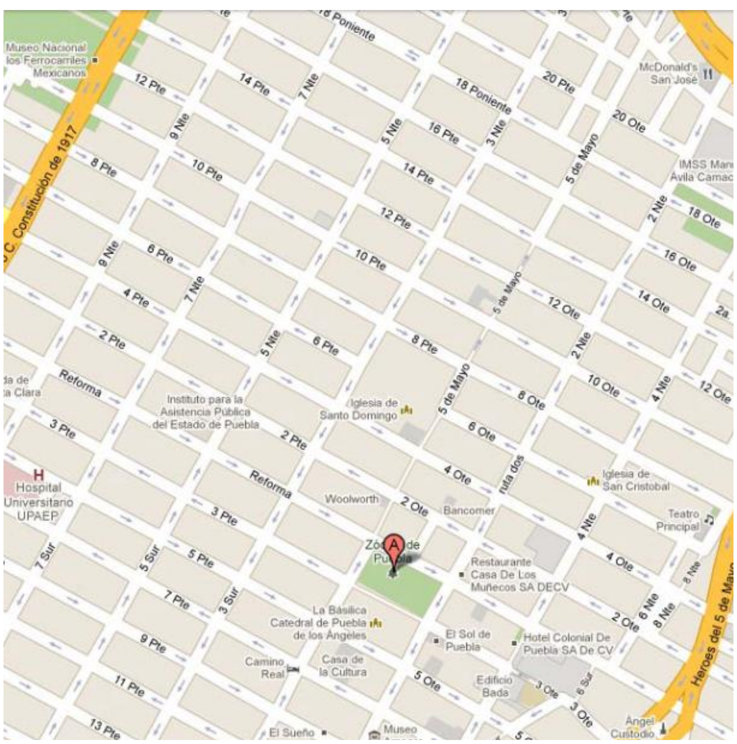
LECTURA COMPLEMENTARIA:

En México encontramos ciudades en que sus calles fueron nombradas para facilitar el orientarse y trasladarse de un punto a otro.

Dos casos de lo más conocidos son las ciudades de Mérida y Puebla.

La figura muestra el plano de la ciudad de Puebla.

El origen está donde se cruza la avenida Reforma-Juan de Palafox y M., con la 5 de Mayo-16 de Septiembre.



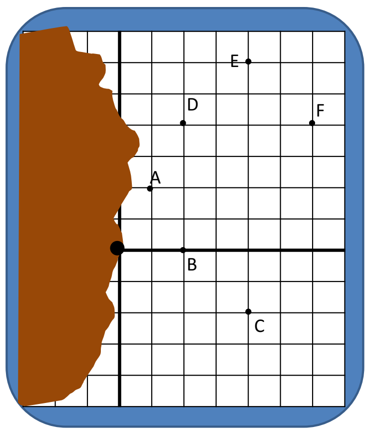
¿A cuántas cuadras del origen, hacia el Este (u Oeste) y cuántas hacia el Norte (o Sur) están los siguientes puntos de interés?

El Teatro Principal ____________.
El Hospital Universitario de la UPAEP ____________.
Museo del Ferrocarril ____________.
¿En qué cuadrantes está cada uno de los edificios?

2.6. Lección 6: AL MAL TIEMPO, BUENA CARA

SITUACIÓN PROBLEMA:

El radar de un puerto cubre la zona que aparece en la pantalla. Los puntos en ella representan embarcaciones.



La pantalla es un plano cartesiano, con el puerto ubicado en el origen. Cada división representa 10 kilométros.

El servicio metereológico avisa a la Capitanía de Puerto que durante varios días habrá una tormenta a más de 40 kilómetros al Este del Puerto.

- ¿Cuáles barcos están en la región afectada por la tormenta?
- ¿Cómo representas esta región en el plano cartesiano?
- ¿Qué embarcaciones corren peligro y deberían ser avisadas por la Capitanía del Puerto?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, intenta resolver el problema. Discute tu solución con tus compañeros y tu profesor:

1. Cada embarcación aparece en el plano como un punto. La tormenta ¿aparecerá como un punto o como un conjunto de puntos?

2. Si un barco está, por ejemplo, a 50 km al Este del Puerto, su abscisa será $x = 50$.
3. Localiza varios puntos cuya abscisa sea igual a 50, con diferentes ordenadas, ¿qué resulta si unes estos puntos?
4. Repite los dos puntos anteriores para varios puntos cuya abscisa sea 45 y 60. En todos los casos ¿las abscisas son mayores de de 40?, todos estos puntos están a la derecha de $x = 40$?

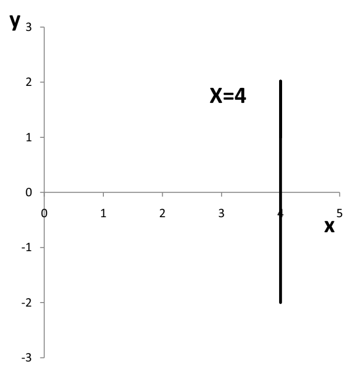
   Representa en el plano todos los puntos cuya abscisa sea mayor de 40, con algún sombreado o rayado (con lápiz y suavemente, para que pueda ser borrado después).
5. Ahora ve cuáles puntos cumplen con la condición de que su abscisa sea mayor de 40, ó $x > 40$
6. La región donde habrá tormenta debe haber sido marcada por la sombra que dibujaste. Los puntos en su interior deberán cumplir la condición señaladas arriba; si no, están fuera de esa región.
7. ¿Cuáles barcos están dentro o cerca de la región de tormenta, y habrá que avisarles para que tomen refugio? Observa el barco C; si navega hacia el Norte ¿corre algún peligro?, ¿y si navega hacia el Este?

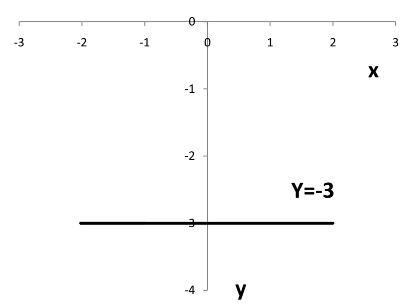
FORMALIZACIÓN

En un plano cartesiano, expresiones tales como:

$$x = 4 \,,\, y = -3$$

dan lugar a rectas, ya que todos los puntos sobre las rectas satisfacen la condición dada (que la abscisa sea igual a 4 o que la ordenada igual a -3).

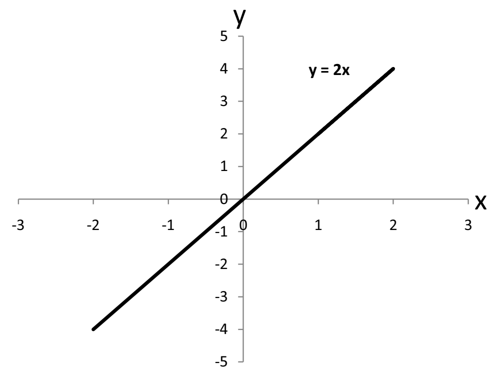




Si deseamos representar en un plano los conjuntos de puntos que satisfagan o cumplan condiciones como las siguientes, también se obtienen rectas:

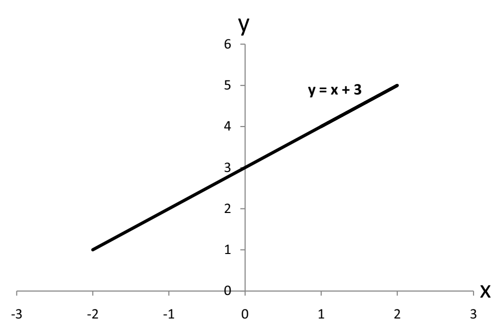
- Los puntos cuya ordenada sea el doble de su abscisa; la expresión algebraica de esta condición es

$$y = 2x$$



- Los puntos tales que su ordenada es igual a la abscisa más 3;

$$y = x + 3$$



Expresiones tales como

$$x < -1 \text{ ó } y > 5.4$$

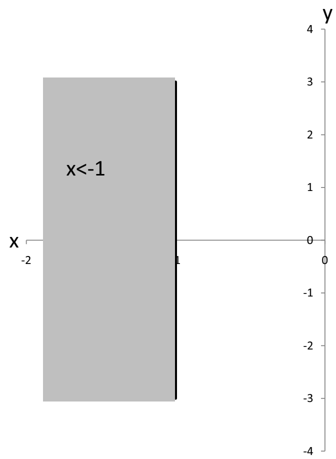
Por su parte,

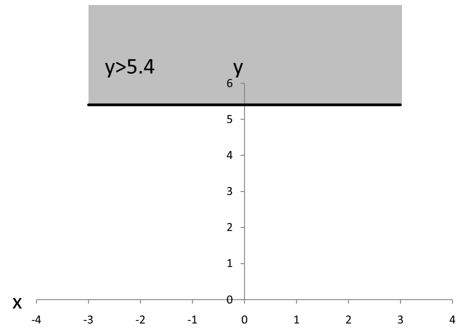
$$0 < x < 6 \text{ y } -2 < y < 0.9$$

corresponden a franjas del plano cartesiano.

El punto (4,1) está dentro de la región o franja definida por $0 < x < 6$; los puntos (0,3) y (7,2) no pertenecen a esta región. Compruébalo dibujando y localizando estos puntos en el plano.

APLICACIÓN

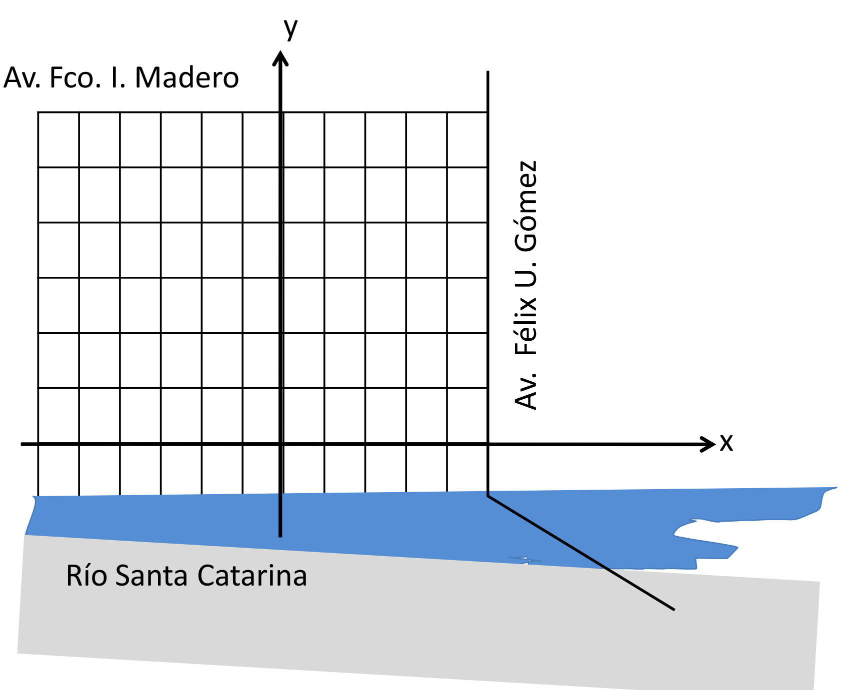




A un mapa de la ciudad de Monterrey se le ha superpuesto un plano cartesiano, como se muestra en la figura de la página siguiente. En él, la avenida Félix U. Gómez es una línea recta. La expresión algebraica de esa línea es $x = 5$. Si deseas verificarlo, localiza varios puntos sobre la línea de esa Avenida y observa que todos tienen la misma abscisa, y que dicho valor es de_______.

¿Cuál es la expresión para la línea que representa a la avenida Francisco I. Madero?_______. Verifica tu res puesta.

Si trazamos una línea a lo largo del río Santa Catarina (en la parte del río que pasa frente al centro de la ciudad, y haciendo caso omiso del cambio de curso del río en la parte oriente de la ciudad), la expresión para esa línea es $y = -1$.



A su vez, las expresiones de algunas regiones son:

- Región al Norte de la avenida Madero: $y > 6$.

- La región al Sur del río Santa Catarina: $y <$
- Region_____________________: $x > 5$.

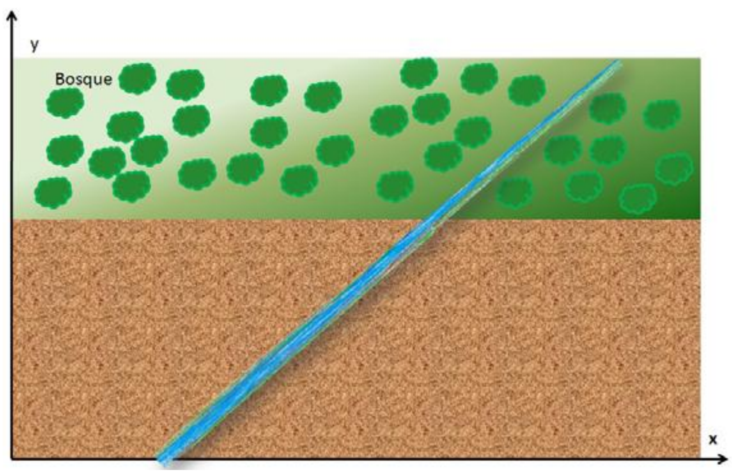
La franja comprendida entre la avenida_____________________y la avenida Félix U. Gómez se puede expresar como $0 < x < 5$. Para verificar esto último, ubica dos puntos: uno dentro de la franja y otro fuera.

Por ejemplo, el punto (2,2) está dentro de la franja:
¿su abscisa cumple con estar entre 0 y 5, o sea con $0 < x < 5$?_______.

El punto (-3,4) está fuera de la franja:
¿su abscisa cumple con estar entre 0 y 5, o sea con $0 < x < 5$?_______.

EJERCICIOS

◇ Encuentra en el mapa expresiones algebraicas para los siguientes conjunto de puntos:



- El bosque.
- La zona de tierra cultivable.
- La expresión algebraica para el curso del río.

  ¿Qué está representado por la expresión $y = 0$?

  Representa en el mapa la región $x > 8$

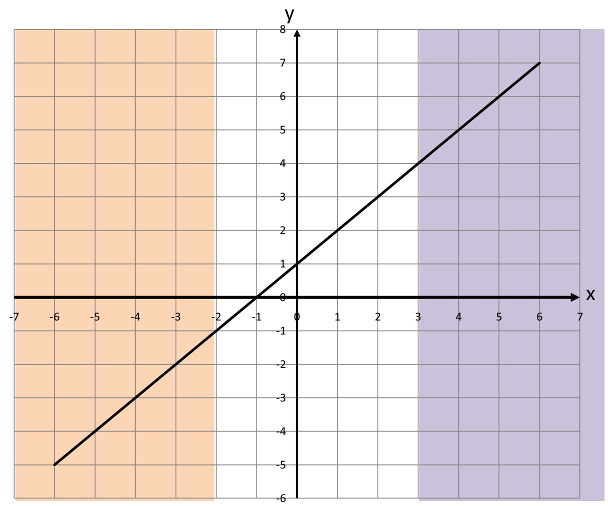
◇ En el plano cartesiano de la Situación-problema (pantalla de radar de un puerto), señala otra región en la que ahora se pronostique habrá un clima desfavorable: la región a más de 20 Km al Sur del puerto. ¿Qué barcos quedarían dentro de esta nueva región?

◇ Representa en un plano cartesiano las siguientes rectas: $x = -2$, $y = 3.5$, $y = x$, y la recta formada por puntos cuya abscisa es $\frac{1}{3}$ de su ordenada.

◇ ¿Cuáles son las expresiones algebraicas de las rectas y regiones de la gráfica?

◇ Representa en un plano cartesiano las siguientes regiones:

$x > -3$; $2.5 > y > 0$.



LECTURA COMPLEMENTARIA:

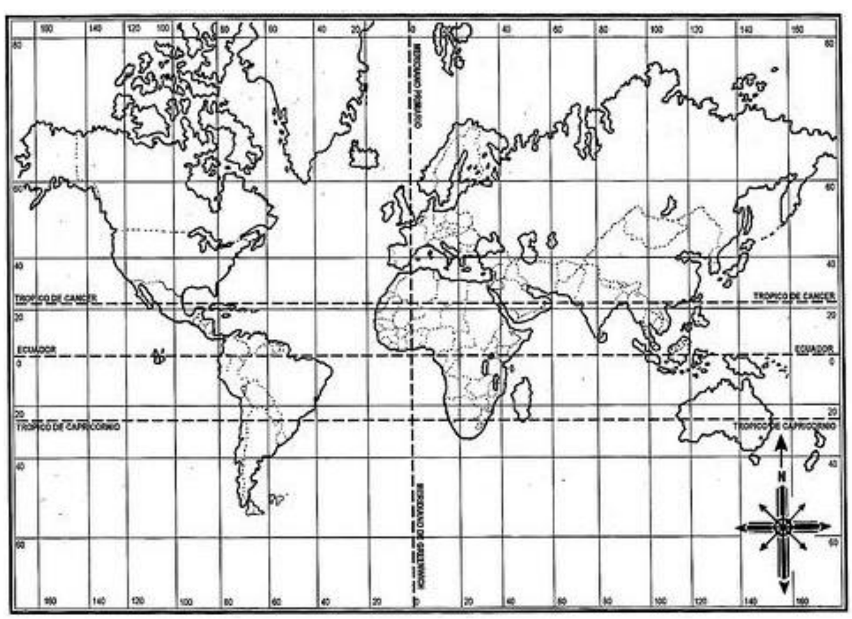
Los puntos cardinales (Norte, Sur, Este y Oeste) nos permiten orientarnos y dirigirnos a algún lugar, cuando sabemos en que dirección se encuentra.

Pero lo anterior no basta localizar con toda precisión un punto sobre la superficie de la Tierra y en los mapas. Para ello, los geógrafos han trazado líneas sobre el globo terráqueo, de manera que un mapa mundial se puede considerar como un plano cartesiano.

El origen del plano está en el cruce del Ecuador y el Meridiano de Grennnwich. Las líneas verticales son los *meridianos*, y las horizontales se llaman *paralelos*.

La región ubicada entre el trópico de Cáncer y el trópico de Capricornio se conoce como Zona Tropical.

En el planisferio, sombrea esta región con lápiz. En un planisferio el Ecuador divide a la superficie terrestre en dos semiplanos, que corresponden con los hemisferios Norte y Sur de la Tierra.



2.7. Lección 7: ¿CUÁNTOS SOMOS?

SITUACIÓN PROBLEMA:

En una reunión, el número de muchachos es igual la doble que el de muchachas. Si se van tres jóvenes de cada sexo, el número de muchachos que se quedan es el triple del número de muchachas. ¿Cuántas chavas y chavos había inicialmente en la reunión?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo que sigue, imagina alguna manera de resolver el problema. Recuerda que puede haber diferentes formas de encontrar la solución. Comenta lo que encuentres con tus compañeros y tu profesor.

1. Después de leer detenidamente el problema, ¿cuáles son las cantidades que desconoces y qué hay que encontrar? (incógnita es el nombre que se le da a una cantidad desconocida).

2. Dale un nombre (asígnale una letra) a cada una de esas cantidades.

3. ¿Cuál es la relación entre el número de muchachos y el de muchachas al inicio de la reunión? Expresálo con palabras y con una ecuación.

4. ¿Cuál es la relación entre los número de jóvenes de ambos sexos más adelante en la reunión? ¿Cómo expresarías esta relación en términos de de las mismas incógnitas?

5. ¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tienes?

6. Recuerda cuál ecuación expresa la relación entre los números de muchachos y de muchachas al principio de la reunión: ____________________.

   ¿Esta expresión te sirve para susutituir en la otra ecuación? La ecuación que resulta, ¿la puedes resolver?

FORMALIZACIÓN

A veces se presentan problemas en los cuales no hay sólo una catidad desconocida o incógnita, sino dos. Por ejemplo:

Problema	**C**antidades desconocidas o incógnitas
El perímetro de un terreno rectangular es de 90 m, y de largo tiene 12 más que de ancho	Largo y ancho del terreno
Rocío compró cuatro cuadernos y 5 lápices por \$ 59.50; cada cuaderno costó el triple que un lápiz	Precio de cada cuaderno y precio de cada lápiz

Asimismo, al plantear el problema se pueden escribir dos ecuaciones que relacionan las dos incógnitas. En el segundo caso de los dos anteriores, las dos ecuaciones y las dos incógnitas son:

Cantidades desconocidas o incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{precio de un cuaderno} \\ y &= \text{precio de un lápiz} \end{aligned}$$

Ecuaciones:

1. Pagó \$59.50 por cuatro cuadernos y cinco lápices:

$$4x + 5y = 59.50$$

2. El precio de cada cuaderno es igual al triple del de un lápiz:

$$x = 3y$$

Las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 59.50 \qquad (2.1) \\ x &= 3y \qquad (2.2) \end{aligned}$$

forman lo que se conoce como un *sistema de ecuaciones*; en este caso, se trata de un *sistema de ecuaciones lineales*, porque ambas ecuaciones se pueden representar en un plano cartesiano como líneas rectas.

En un sistema, las dos ecuaciones se consideran juntas, ya que con las dos se puede solucionar el problema. Tanto en la primera como en la segunda, la x representa lo mismo: el precio de un cuaderno. De la misma forma, la y representa el precio de un lápiz en ambas ecuaciones.

Para resolver el sistema, hay que buscar cómo transformar las dos ecuaciones en una sola, la cual tenga también sólo una incógnita. Ésta a su vez la podemos resolver con alguno de los métodos vistos en la lección 4.

En este caso, podemos llegar a una sola ecuación si sustituimos x por $3y$ en la primera ecuación (lo que expresa la ecuación 2.2 es que, es lo mismo el precio de un cuaderno, que tres veces el precio de un lápiz):

$$4(3y) + 5y = 59.50$$

Efectuando operaciones:

$$12y + 5y = 59.50$$

Reduciendo términos semejantes:

$$17y = 59.50$$

Despejando la incógnita:

$$y = \frac{59.50}{17} = 3.50$$

Así tenemos que el precio de un lápiz es de $y =$ \$3.50.

Volvemos a la ecuación 2 para encontrar el precio del cuaderno:

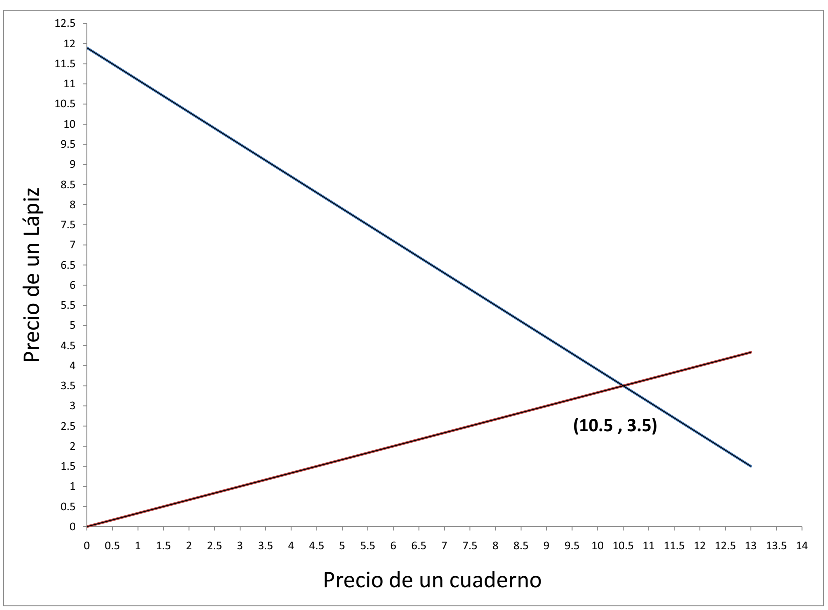
$$x = 3y = 3(3.50) = \$10.50$$

Se efectúa la comprobación:

$$4(10.50) + 5(3.50) = 42 + 17.50 = 59.50$$

De esta manera, vemos que la solución del sistema son los valores $x = 10.50$, y $y = 3.50$, los cuales satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.

La representación gráfica del sistema de ecuaciones es el siguiente. Puede observarse que el punto con coordenadas (10.5 , 3.5) es común a ambas rectas; por ello, dicho punto es la representación gráfica de la solución del sistema de ecuaciones.



APLICACIÓN

En el expendio de café “El Veracruzano” hay café de dos clases; uno de \$54 el kilogramo y otro que cuesta \$70 el kilogramo. Se desea obtener una mezcla de 200 kilogramos de café para venderla a \$60.00 ¿Cuántos kilogramos deberán ponerse de cada café?

$$\begin{aligned} x &= \text{kilogramos de café de \$54} \\ y &= \text{kilogramos de café de \$70} \end{aligned}$$

El total de la mezcla será de 200 Kg: $x + y = 200$

La mezcla se venderá a \$ 60 por kilogramo:

$$54x + 70y = 200(60) = 12000$$

El problema se resuelve con el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 200 \tag{2.3}$$
$$54x + 70y = 12000 \tag{2.4}$$

Como no está despejada ninguna de las incógnitas, despejaremos la y en la ecuación 2.3:

$$y = 200 - x$$

Sustituyendo en la ecuación 2.4:

$$54x + 70(200 - x) = 12000$$

Se efectúan las operaciones y se despeja x:

$$\begin{aligned} 54x + 14000 - 70x &= 12000 \\ -16x &= -14000 + 12000 \\ x &= \frac{2000}{16} \\ x &= 125 \end{aligned}$$

Sustituyendo en $y = 200 - x$: $200 - 125 = 75$

Lo anterior significa que se necesitan:
125 kg de café de \$54
75 kg de café del de \$70.

Para comprobar que ésta es la solución, se sustituyen los valores encontrados para x y para y en la ecuación 2.4:

$$54(125) + 70(75) = 6750 + 5250 = 12000$$

EJERCICIOS

◇ Resuelve los siguientes problemas. Comprueba los resultados que obtengas.

1. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular si su perímetro es de 18000 metros, y su largo es el triple de su ancho?
2. Santiago debe partir una tabla de 2.70 metros de largo en dos partes, tales que la primera sea el doble de largo que la segunda ¿De qué tamaño deberá ser cada tramo?
3. Juan Manuel y Alonso tienen 40 CD'S de música grabada entre los dos. Juan Manuel dice "Regálame cuatro CD'S para que así tengamos igual número". ¿Cuántos tiene cada quién?
4. Las edades de Gustavo y Javier suman 63 años. Gustavo es cinco años mayor que Javier ¿Qué edades tienen?
5. En dos zonas de la ciudad de México, noreste y suroeste, el índice de contaminación por ozono era el doble en la segunda que en la primera, a las 11 de la mañana. Seis horas después, en la zona noreste el índice ha disminuido 20 puntos, y 140 en la zona suroeste, de manera que ahora están en el mismo nivel. ¿Cuáles eran los índices en cada zona a las 11 de la mañana?

◇ Elabora gráficas de los sistemas de ecuaciones de los problemas 1 y 2.

◇ Verifica si las siguientes son soluciones de los sistemas de ecuaciones correspondientes:

1.
$$\begin{aligned} 6x+2y &= 560 \\ x+y &= 150 \\ x &= 65 \\ y &= 85 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 4x-y &= -6 \\ x+3y &= 5 \\ x &= -1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x-y &= 3 \\ x &= 7 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

LECTURA COMPLEMENTARIA:

Los sistemas de ecuaciones aparecen en muy diversos campos. En economía han adquirido mucha importancia, debido a que diferentes aspectos o temas se estudian mediante ecuaciones. Al irse desarrollando las teorías económicas se han encontrado expresiones algebraicas cada vez más complejas, y han surgido sistemas de ecuaciones que describen como opera alguna actividad económica.

Por ejemplo, un sistema sencillo de dos ecuaciones es

$$\begin{aligned} C &= \alpha + \beta y \\ Y &= C + Z \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} C &= \text{gasto en consumo} \\ Y &= \text{ingreso} \\ Z &= \text{gasto para fines diferentes del consumo} \\ \alpha \ y \ \beta &= \text{número o coeficientes} \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones y sus variables se refieren a la economía de un país en conjunto. En este sentido, se ha llegado a representar toda la economía de un país con sistemas de hasta varios cientos de ecuaciones, con igual número de variable, lo cual se conoce como *modelo insumo-producto* de su economía.

Al resolver estos sistemas de ecuaciones, los economistas conocen mejor el aspecto o tema de que se trate. En ocaciones, ello les permite pronosticar el desempeño futuro de la economía de un país.

2.8. Lección 8: PARA QUE LA ENSALADA ALCANCE

SITUACIÓN PROBLEMA:

Mónica invitó a cuatro amigas a comer a su casa. Tiene la siguiente receta para preparar zanahorias al horno, para cuatro porciones (o cuatro personas):

- 4 tazas de zanahoria cocida rebanada
- 1 taza de queso rallado
- $\frac{1}{2}$ taza de crema
- 2 huevos
- sal y pimienta al gusto

Si las siguientes cantidades de ingredientes se representan por medio de letras,
1 taza de zanahoria:z
1 taza de queso: q
1 taza de crema: c
1 huevo: h
Escribe una expresión para la receta de Mónica (haz caso omiso de la sal y pimienta, es decir no las incluyas en la expresión).

Para calcular las cantidades, para cinco personas, de cada uno de los ingredientes, ¿qué debe hacer Mónica? ¿Y si llegarán a ser ocho personas en total; cómo tendría que modificar la expresión para su receta?

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo que sigue, imagina alguna manera de resolver el problema. Después discútelo con tus compañeros y tu profesor:

1. Si una taza de zanahoria equivale a z, ¿cómo escribes cuatro tazas? De manera similar, expresa la cantidad de cada ingrediente de la receta. A partir de la cifra que se representa en la recta,¿cómo se obtiene o llega a la nueva cantidad para cinco personas?

2. Si para elaborar el platillo se van añadiendo los ingredientes, ¿cómo se puede expresar esto?

3. Para poder preparar suficiente zanahoria al horno para cinco personas, toma la expresión para uno de los ingredientes, por ejemplo la zanahoria:

   - Esa expresión es para cuatro personas, ¿cuánta zanahoria necesitas para una persona?, ¿y para cinco personas?
   - Repite los pasos anteriores para todos los ingredientes.

4. ¿Qué podrías hacer si el número de personas es el doble? ¿Cómo se modificaría la expresión de la receta?

FORMALIZACIÓN

Lo que escribiste en lenguaje algebraico en la situación-problema son *expresiones algebraicas*, semejantes a las siguientes:

$$\frac{1}{2}x^3; -8ab; \frac{1}{3}z + 15\frac{z}{y} + 9$$

es decir, conjuntos de letras y números relacionados entre sí por operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Un *término* es una expresión algebraica separada de otras por operaciones de suma o resta:

$$4xy^2 \text{ un término; } 2x^2 - \tfrac{8}{5}z + 11 \text{ tres términos}$$

Términos semejantes son los que presentan las mismas variables elevadas a las mismas potencias:

$$4xy^2, -\frac{2}{3}y^2x \text{ son términos semejantes}$$

$$\frac{a^2b}{c}, \frac{a^3b}{c^2} \text{no son términos semejantes}$$

Se llama *monomio* a una expresión algebraica formada por un sólo término:

$$5a; -\frac{13}{4}x^3z; \frac{5}{t}$$

Un *polinomio* es una expresión que consta de la suma o de la resta de dos o más monomios:

$$\frac{m}{4} + \frac{n^2}{18} - 1.76$$

Un polinomio que tenga dos términos se conoce como *binomio*; si consta de tres, es un trinomio; a los polinomios con n términos se les llama *polinomios de n términos*.

Ejemplos:

Monomios: $a^3; 8; \frac{5z^4}{x}$

Binomios: $3r - \frac{1}{2}r^2t; 16 + 21g^3$

Trinomios: $\frac{6a^2b^3}{c} - 18ab + \frac{1}{bc}; x^2y + 7 - 5xy$

Polinomio de cuatro términos: $x^3 - 3x^2 - 24x + 26$

El *grado de un monomio* es la suma de los exponentes de sus variables.
El *grado de un monomio respecto a una variable* es el exponente de dicha variable.

Monomio	**Grado del monomio**	**Respecto a x**	**Respecto a y**
$4xy^2$	3	1	2
$\frac{x^3}{y}$	2	3	-1
+9	0		

El *grado de un monomio* es el que tenga su término de mayor grado. El *grado de un polinomio respecto a una de sus variables* es el de mayor exponente entre todos los términos del polinomio:

$6t^2 - 12t - 15$	grado del polinomio: 2
	grado del polinomio respecto a t: 2
$9a^4 - 16a^3b^2 + 4b^4 - 36ad + 64b^2d^2$	grado del polinomio: 5
	grado del polinomio respecto a $a:4$
	$b:4$
	$d:2$

APLICACIÓN

1. Al lanzar una pelota hacia arriba con una velocidad v, su altura está dada por la expresión

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

en la cual g es la aceleración debida a la gravedad, y t es el tiempo transcurrido desde que se lanzó la pelota. si la velocidad inicial es de 3.5 m/seg. tenemos el siguiente polinomio:

$$3.5t - 4.9t^2$$

En él, 3.5 es un término o monomio; $-4.9t^2$ es otro _________.

Por tener dos términos, el polinomio es un _________.

El grado del polinomio es de _____, y su grado respecto a t es ________.

2. Para conocer cuánto papel se necesita para envolver cajas con forma de prisma cuadrado hay que calcular las áreas de dichas cajas.

área de la base: l^2

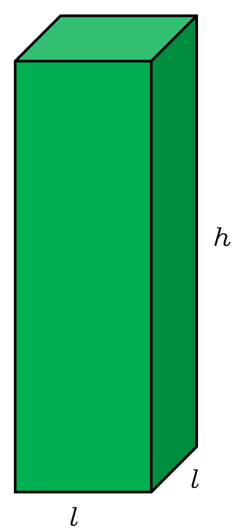
área de la tapa: _________.

área de una cara lateral: hl

área lateral total (o de las cuatro caras laterales): _________.

área total: $2l^2 + 4hl$

La expresión del área total es un _________, por número de términos de que consta.
El grado del polinomio es _____. Su grado en _____ es de _____y en _____es de _____.



EJERCICIOS

◇ Completa las siguientes características de los monomios.

Monomio	**Grado**	**Grado resspecto a sus variables**
$28x^2$		x:
$\frac{10}{3}r^3st^2$		r: s: t:
-5.4		
$\frac{120w^4}{y}$		

◇ Escribe ejemplos de monomios con las siguientes características.

Grado respecto a cada variable	**Grado del monomio**	**Monomio**
$a:3$ $b:2$	5	
$x:4$ $y:1$		
$z:2$		
$m:3$ $n:-1$	2	

◇ Completa la siguiente tabla.

Expresión	**Nombre, según el número de sus términos**	**Grado del polinomio**	**Grado respecto a sus variables**
$2m^2-3m+1$			$m:$
$6x^2+7x^2y-3y^3-2x+8$			$x:$ $y:$
$45r^3-5.7$			$r:$
$-\frac{3}{5}g^4+\frac{h^2}{10g^3}$			$g:$ $h:$

◇ Escribe ejemplos de polinomios.

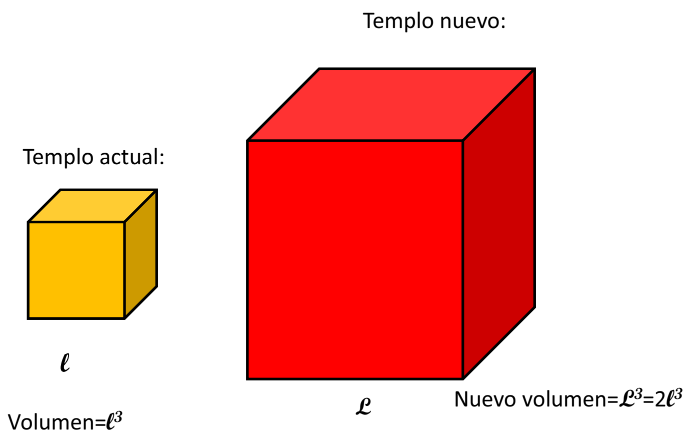
Número de términos	**Grado del polinomio**	**Grado respecto a sus variables**	**Polinomio**
Trinomio	2	$y:2$ $z:1$	
Binomio	3	$a:3$	
Trinomio	grado:	$r:3$ $s:2$ $t:1$	
Polinomio de cuatro términos	4	$f:$ $g:$ $h:1$	

LECTURA COMPLEMENTARIA:

Uno de los polinomios más antiguos que se conoce surgió en Grecia. Durante el siglo II antes de nuestra era, hubo una gran epidemia.

Como era su costumbre en las grandes tribulaciones, los griegos acudieron al templo de Zeus a pedir orientación para enfrentar la peste. La respuesta fue que ésta cesaría si se duplicaba el templo de Zeus.

Dado que el templo tenía forma cúbica, el asunto era encontrar una longitud L:



la última expresión equivale a

$$\left(\frac{L}{l}\right)^3 = 2$$

Si cambiamos la razón entre las dos longitudes $\frac{L}{l}$ por x, tendremos:

$$x^3 = 2$$

el cual es un polinomio de________ grado.

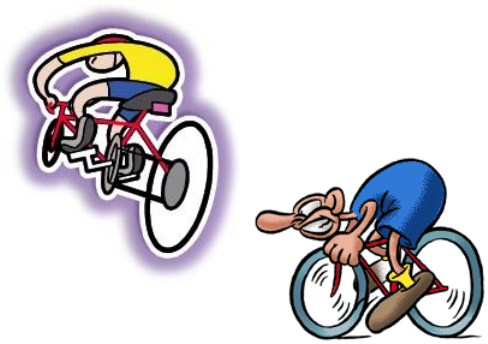
2.9. Lección 9: ¿QUIÉN PEDALEA MÁS?

SITUACIÓN PROBLEMA:

En la prueba de ciclismo contrarreloj femenil las competidoras que ocuparon los primeros lugares hicieron el recorrido de 500 metros a las siguientes velocidades(Copa Mundial 1995, Barcelona España):

Lugar	País	Velocidad (metros/segundo)
1o.	Estonía	14.22
2o.	Nueva Zelanda	14.08
3o.	Estados Unidos	13.93
4o.	México	13.75

La distancia recorrida por una ciclista se puede escribir como una expresión algebraica, donde la cantidad que no se conoce es el tiempo.
Si tienes dicha expresión ¿Cómo puedes calcular la distancia recorrida por la ciclista de Estonia en varios momentos, por ejemplo a los 20 o 30 segundos? ¿cómo representarías en una gráfica la distancia recorrida por una ciclista en diferentes tiempos?



ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo que sigue, imagina alguna manera de resolver el problema. Después discútelo con tus compañeros y tu profesor:

1. Si conoces la velocidad de un cuerpo, y el tiempo que lleva viajando a esa velocidad, la distancia recorrida está dada por:

   distancia recorrida=____________ $\times$ ____________.

2. En el caso de la ciclista de Estonia, lo que se conoce es su velocidad promedio de________m/seg.

3. Escribiste una expressión algebarica de la distancia recorrida por esta corredora: d=________ $\times$ ________.

4. Con basde en la expresión anterior, calcula la distancia para t=25 segundos.

5. ¿Cómo calcularías la distancia recorrida durante los 10 primeros segundos?

   distancia a los 10 segundos =____________ $\times$ 10= ____________metros

   distancia a los 20 segundos = ____________metros

   distancia a los 30 segundos = ____________metros

   Usa tu calculadora para obtener los diferentes valores de la distancia cubierta por la ciclista.

6. Ahora dibuja un gráfica, con el tiempo en el eje horizontal y en el eje vertical la distancia recorrida por la ciclista ganadora; localiza tres puntos en el plano cartesiano y únelos.

FORMALIZACIÓN

Se puede conocer el valor de polinomio dándole valores a sus variables. Por ejemplo, la distancia recorrida por la ciclista mexicana está dada por la expresión $d = 13.75t$.

La distancia que habrá recorrido a los 20 segundos fue de

$$(13.75 \text{ m/seg}) \times (20 \text{ segundos}) = 275.0 \text{ metros}$$

Los diferentes valores obtenidos para esta expresión (formada por un sólo término, por lo cual se trata de un *monomio*), se pueden acomodar en una sola tabla:

t(tiempo, en segundos)	**d(distancia recoirrida, metros)**
5	
10	
15	206.25
20	275.0
25	
30	

Emplea tu calculadora para obtener los demás valores de la expresión algebraica: Puedes aplicar la multiplicación por un término constante.

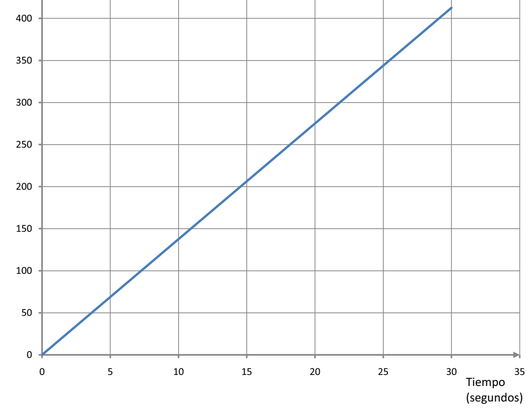
¿Cuál es el término constante de este caso?

Cada par de datos, un tiempo y la distancia recorrida en esos segundos de tiempo, se puede representar como un punto en un plano cartesiano.

Por ejemplo, los tiempos y distancias de la competidora mexicana se muestran en la siguiente gráfica.

Ya vimos que la expresión algebraica es un monomio.

¿Cómo es su gráfica?
Es una línea________________. ¿pasa por el origen?____________.
A medida que transcurre el tiempo, ¿qué sucede con la distancia: aumenta o disminuye?
Cuando se calculan diferentes valores para un polinomio o monomio, se dice que se *evalúa* dicha expresión algebraica.



APLICACIÓN

Rosalinda fabrica cubos de madera como juguetes. Elabora cubos de diferentes tamaños, los lija y los pinta.
Para ayudar a Rosalinda, tendremos que encontrar primero un polinomio que exprese el costo de procesar un cubo de cualquier tamaño; después habrá que evaluar ese polinomio para distintos tamaños.

Una cara de un cubo tiene por área:

$$\text{Área de un lado: } x^2 \quad x = \text{centímetros de lado}$$

y como el cubo tiene seis caras, su superficie total es de:

$$\text{superficie total del cubo: } 6x^2 \text{ (en centímetros cuadrados)}$$

Cuesta dos centavos pintar cada centímetro cuadrado del cubo (o 0.02 pesos) y se agrega el costo de la lija, así que el costo total de procesar un cubo de madera es:

$$(0.02)(6x^2) + 0.15$$

$$= 0.12x^2 + 0.15$$

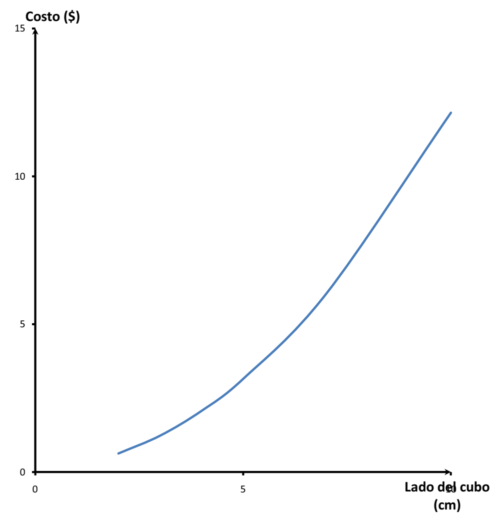
Este polinomio tiene ________ términos; por ello es un________________; su grado es ________.
Ahora evaluaremos el polinomio. Por ejemplo, para un cubo de 4 centímetros de lado, el costo sería:

$$\begin{aligned} 0.12(4)^2 + 015 &= 012 \times 16 + .15 = \\ 1.92 + 0.15 &= 2.07 \text{ pesos} \end{aligned}$$

Continúa evaluando el polinomio para diferentes tamaños indicados el cuadro. (Utiliza tu calculadora para hacer las operaciones necesarias):

x **lado del cubo (en cm)**	$\mathbf{0.12x^2 + 0.15}$ **costo de procesar el cubo (en pesos)**
2	
3	
4	2.07
5	
7	
10	12.15

Para representar gráficamente este polinomio, primero localiza en el plano cada par de datos del cuadro; después une los puntos.
La gráfica de la columna de la derecha es en este caso una curva, lo cual se debe a que el polinomio es de segundo grado.
¿Cómo varía el costo a medida que aumenta el lado del cubo?
¿El costo siempre es positivo, o puede ser negativo?
¿Tendría sentido evaluar este polinomio para valores de x negativo? ¿Qué significaría evaluar $x < 0$?



EJERCICIOS

◇ La papelería “El clip de oro” tiene los siguientes precios:

- engargolado de documentos: $25.00

- fotocopias: $0.40

¿Cuánto cuestan 20 copias?, ¿cuánto, 30 copias? ¿cuánto pagarás por un documento de 42 páginas, fotocopiado y engargolado?

1. Encuentra la expresión algebraica para el costo de fotocopiar y engargolar un documento, en términos de su número de páginas, ¿de cuántos términos es el polinomio que resulta y de qué grado es?

2. Evalúa el polinomio (para los siguientes número de páginas: 10, 15, 18, 20, 25 y 36), elabora su gráfica. ¿La gráfica es curva o recta?

◇ Rosalinda elaborará esferas de madera. la superficie de una esfera es de $4\pi r^2$ centímetros cuadrados, donde r es la longitud del radio de la esfera y se mide en centímetros. La pintura le cuesta igual, dos centavos por centímetro cuadrado, y las esferas no necesitan lijarse.

Encuentra la expresión algebraica para el costo de procesar esferas de diferentes tamaños.

Evalúa el polinomio y traza su gráfica.

¿De qué grado es el polinomio? Describe la gráfica. Considera los siguientes radios de esferas en centímetros: 1, 1.5, 2, 3, 4, 4.5, 5 y 6.

◇ El siguiente polinomio expresa las distancias recorridas por un camión con diferentes cantidades de litros de gasolina, $1:5.71$.

Elabora una tabla de valores así como su gráfica.

◇ Evalúa los siguientes polinomios y elabora sus gráficas. Señala las características de cada polinomio (tales como grado, etc.) y relaciónalas con las gráficas (es recta o curva, aumente o disminuye, etcétera).

1. $-2x+3$
2. $0.7m^2-m-2$
3. $r^3+\frac{r^2}{2}+3$

LECTURA COMPLEMENTARIA:

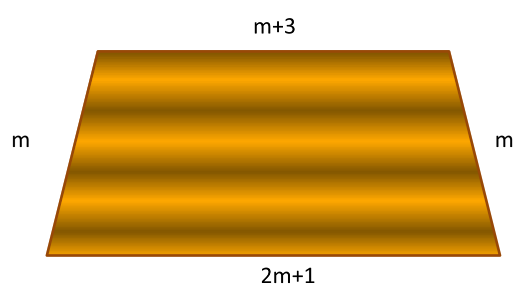
INTERNET Y LOS POLINOMIOS

Una aplicación reciente de polinomios se ha realizado en la transmisión de información.
Durante los últimos años, el tráfico de datos por medio de las "carreteras" de la información han crecido enormemente. Por ello, hay proyectos que pretenden aumentar las velocidades de transmisión y conservar al mismo tiempo la integridad de los datos, es decir, limitar al máximo posible las pérdidas de información.
Un método desarrollado para tal fín se denomina PET (por sus siglas en inglés, Priority Encoded Transmission, o Transmisión Codificada con Prioridades). Con el PET, para ser enviada, la información se distribuye entre diferentes paquetes. Esta distribución se determina con base en polinomios. Se utilizan polinomios en una variable, y de mayor grado mientras mayor sea el volumen de datos que se vaya a transmitir.
La idea es que al intentar evaluar los polinomios en el lugar donde se recibe el mensaje, debe haber datos de más, de manera que si se perdió algún paquete o parte de uno durante la transmisión, pueda de cualquier forma evaluarse cada polinomio y reconstruir correctamente el mensaje original.

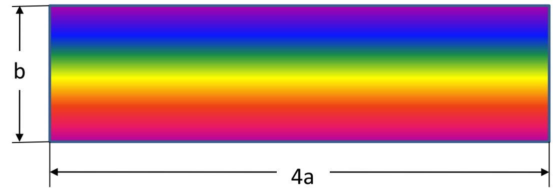
2.10. Lección 10: MIENTRAS MÁS SIMPLE, MEJOR

SITUACIÓN PROBLEMA:

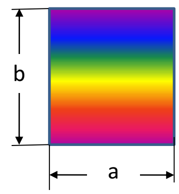
El tío Jorge tiene un terreno con forma de trapecio, con las medidas que se muestran.
Escribe el perímetro como una expresión algebraica, la más sencilla que puedas, en términos del lado m________________________.



La tía Ramona tiene varios cortes de la tela de dimensiones como las que se muestran; es decir, su largo es cuatro veces su anchura.



Quiere cortar cada uno en partes del siguiente tamaño, para hacer manteles individuales.
¿Cuál es la expresión algebraica que da el número de manteles individuales que salen, o es factible obtener de cada corte de tela?________________________.



ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo que sigue, imagina alguna manera de resolver el problema. Después discútelo con tus compañeros y tu profesor:

Veamos primero el problema del terreno.

1. ¿Cómo se obtiene el perímetro de cualquier figura geométrica?
2. Como no se tienen las medidas en metros deberás emplear el lenguaje algebraico donde intervenga la letra m representando una distancia.
3. Escribe: perímetro=________________________.
4. Cuando estés seguro de que ya incluiste todo, trata de simplificar la expresión; para ello:
   a) Observa cuales términos son semejantes, es decir, presentan las misma variables elevadas a los mismos exponentes.
   b) ¿Cuántas clases de términos hay?
   c) Utiliza las reglas que ya hemos visto para simplificar expresiones algebraicas.

Veamos ahora el caso de los cortes de tela.

1. ¿Cuál es el área de un corte de tela? Escribe su expresión algebraica________________________.
2. ¿Cuál es el área de un mantel individual?________________________.
3. Para saber cuántos manteles salen de un corte, o cuántas veces cabe la superficie de un mantel en la superficie de un corte de tela, hay que dividir el área del corte entre la del mantel:

$$\frac{\text{área del corte}}{\text{área de un mantel}} =$$

4. habiendo escrito el cociente de las dos áreas, trata de simplificar:

   a) Recuerda lo que significa una literal elevada a un exponente; escribe literal por literal, las expresiones algebraicas, tanto del numerador como el denominador:

   b) Procede como cuando simplificas un fracción; si tienes algún factor igual, tanto en el numerador como en el denominador, lo puedes eliminar de las dos partes sin que se altere el valor de la fracción.

FORMALIZACIÓN

Para simplificar términos semejantes en una expresión algebraica, se suman o restan dichos términos:

$$\begin{aligned} 4x+3x &= (4+3)x = 7x \\ -0.3x^2y+yx^2 &= (-0.3+1)x^2y = 0.7x^2y \end{aligned}$$

Los términos numéricos se suman o restan como números con signo:

$$5-\frac{3}{4}+2 = 7-\frac{3}{4} = \frac{28}{4}-\frac{3}{4} = \frac{25}{4}$$

Así, podemos simplificar términos semejantes en siguiente polinomio, hacemos lo siguiente:

$$13+4ab^3-8a^2b^2+5b-(2a^2b^2+9)+ab^3$$

$$= 13+4ab^3-8a^2b^2+5b-2a^2b^2-9+ab^3$$

$$= \underbrace{4ab^3+ab^3}_{+5ab^3}\underbrace{-8a^2b^2-2a^2b^2}_{-10a^2b^2}\underbrace{+5b}_{+5b}\underbrace{+13-9}_{+4}$$

$$= 5ab^3-10a^2b^2+5b+4$$

Para efectuar la multiplicación o el cociente de dos monomios, primero se multiplican los coeficientes con sus respectivos signos; después se multiplican o dividen cada una de las variables, tomando encuenta sus exponentes:

$$(6p^2r^2)(-3pq) = (6)(-3)(p^2r^2)(pq) = -18(p^2p)(r^2) = -18p^3qr^2$$

$$\frac{36x^2yz^5}{-4xyz^3} = \left(\frac{36}{-4}\right)\frac{x^2}{x}\frac{y}{y}\frac{z^5}{z^3} = -9xz^2$$

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se deja dicha base y se suman los exponentes:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n}$$

Algunos ejemplos son:

$$c^5 \cdot c^{-4} = c^{5-4} = c \qquad d^3\left(\frac{1}{d^2}\right)d = d^{3-2+1} = d^2$$

De manera de similar, al dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes;

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

$$\frac{-2h^5}{h^3} = 2h^5h^{-3} = -2h^2\frac{3z^2}{w}\cdot\frac{w^6}{z^4} = 3w^{6-1}z^{2-4} = 3\frac{w^5}{z^4}$$

Cuando hay que elevar una potencia a otra, se multiplican los exponentes, y se aplica la misma base:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(r^5)^2 = (r^5)(r^5)r^{5\cdot 2} = r^{10} \qquad [(s^2)^{-1}]^3 = [s^{-2}]^3 = s^{-6} = \frac{1}{5^6}$$

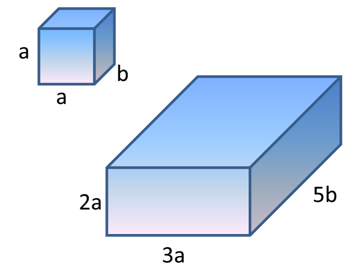
Para elevar un producto o un cociente a una potencia, se eleva cada factor a la potencia:

$$(b\cdot c\cdot d)^n = b^n\cdot c^n\cdot d^n \qquad \left(\frac{f}{g}\right)^k = \frac{f^k}{k^k}$$

$$\left(\frac{2}{8}\right)^8 = \frac{2^8}{5^8}\left(\frac{yz^2}{t^4}\right)^3 = \frac{y^3z^{2\cdot 3}}{t^{4\cdot 3}} = \frac{y^3z^6}{t^{12}}$$

APLICACIÓN

I.- ¿Cuál es el volumen de los dos bloques de hielo? ¿Cuántas veces cabe el menor en el mayor? (o ¿cuántos bloques como el pequeño se pueden obtener si se parte el grande?)



Volumen del bloque pequeño = $(a)(a)(b) = a^2b$

Volumen del bloque grande = $(2a)(3a)(5b) = (2)(3)(5)(a \cdot a)(b) = 30a^2b$

El bloque menor cabe en el más grande:

$$\frac{30a^2b}{a^2b} = 30 \text{ veces}$$

Si el bloque menor cuesta \$1.50, precio del mayor debería ser de: $\$1.50 \times 30 = \$45.00$

II.- Don Rafael les obsequió a cada uno de sus hijos monedas de oro y plata, así como dinero en efectivo. Quiere saber cuánto les dio en total, pero no sabe el valor de cada moneda, las representa con letras: c es el valor de un centernario de oro, en miles de pesos, y p en valor de una onza de plata; el dinero en efectivo también está en miles de pesos:

Juana: $12c + 25$	Pascual: 225	Patricia: $34p + 21$
Pedro: $10c + 80$	Rafael Jr.: $18p + 5c + 49$	Lucas: $17p$

Para obtener una expresión simple del total, primero anotamos los términos con literal c: $12c+10c+5c$.

Después agregamos los términos con literal p $19p + 34p + 17p$.

Finalmente, se agregan los términos numéricos y se van sumando los términos semejantes:

$$(12 + 10 + 5)c + (18 + 34 + 17)p + (25 + 80 + 225 + 49 + 21) =$$

$$27c + 69p + 400$$

.

EJERCICIOS

◇ Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\frac{p^2q^3r^5}{pr^3} =$
2. $(w^{12}x^9)(w^8x^2) =$

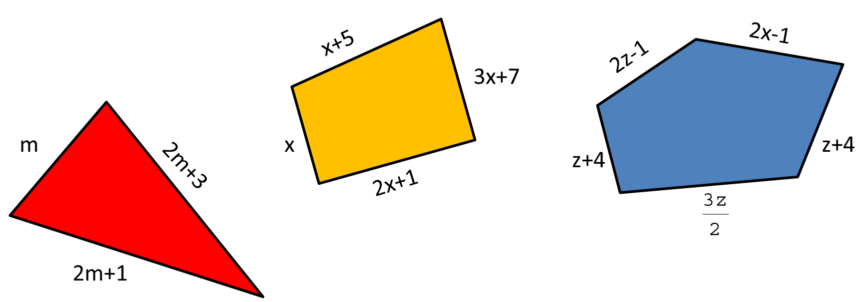
◇ Efectúa las siguientes operaciones y simplifica las expresiones resultantes.

1. $(a^5b^2)(3b^4c) =$
2. $\frac{wx^3}{-4w^2x}$
3. $\left(-\frac{mn^2}{3p}\right)\left(\frac{4p^3}{m}\right) =$
4. $\left(\frac{r^2s^3t}{2}\right) - 14r^55t^4 =$
5. $\frac{f^2gh^3}{2g^3h^4} =$
6. $\left(-\frac{5w^2x}{y}\right)(18y^3w)\left(-\frac{wx^4y^2}{15x^3y}\right)$
7. $\frac{35xy^8z^5}{7y^6z^3}$

◇ Simplifica las siguientes expresiones (hazlo de dos maneras: en forma vertical y agrupando horizontalmente los términos semejantes):

1. $-(2a^3 - 5a + 3b^2) + 2a^2 - 5a + 2 =$
2. $ax^3 + a^2x^2 - 3 + 2ax - 3a^2x^2 + 18ax + 9 =$
3. $m + 2n^2 + 3m^3 + (n^2 - 5) + 6m^3 - m =$
4. $y^2z^3 + 14 - (5x^2 - 2) + z + (9 - y^2z^3 + 3x^2) =$

◇ Encuentra el perímetro de las siguientes figuras y simplifica.



LECTURA COMPLEMENTARIA:

En física hay numerosas aplicaciones de los polinomios. Por ejemplo, se obtiene un polinomio al aplicar la siguiente ecuación (la cual se utiliza para describir el movimiento de un cuerpo lanzado hacia arriba), al caso de un cohete que se va a poner en órbita:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

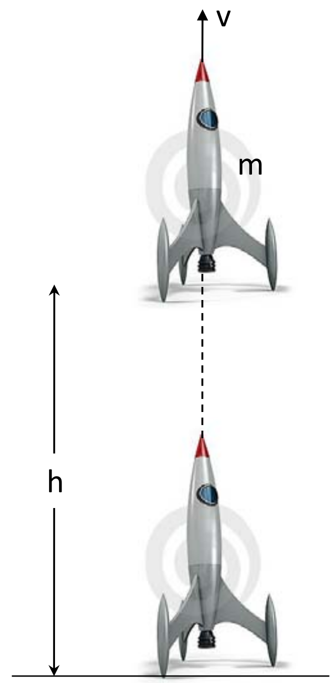
En esta ecuación, m es la masa del cuerpo, v y h son la altura y la velocidad del cuerpo en cualquier momento, y v_0 es la velocidad inicial con la que el cuerpo es lanzado hacia arriba; g es la aceleración debida a la gravedad.

Si la masa del cohete fuese, por ejemplo, 2000 kg y su velocidad de salida de 800 m/seg, tendríamos la ecuación

$$\frac{1}{2}(2000)\,v^2+(2000)(9.8)\,h = \frac{1}{2}(2000)(800)^2$$

$$v^2 + 19.6h = 640000$$

La expresión anterior es un polinomio de segundo grado en la variable v, y de primer grado en h.



2.11. Lección 11: LA LISTA DE ÚTILES ESCOLARES

SITUACIÓN PROBLEMA:

Manuel y Tita fueron a comprar sus útiles escolares para el nuevo año. Manuel necesitó ocho cuadernos, tres bolígrafos y un juego de geometría. Por su parte, Tita compró cinco cuadernos, dos bolígrafos y un juego de geometría.

Los precios de cada artículo fueron:

Precios en pesos	**Artículos**
x	cuaderno
y	bolígrafo
z	juego de geometría

¿Cuánto pagó en total la mamá de Manuel y Tita? Expresa algebraicamente esa cantidad.

ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo que sigue, imagina alguna manera de resolver el problema. Después discútelo con tus compañeros y tu profesor:

1. Puedes empezar por escribir la expresión de lo que costaron los materiales de Manuel.
2. ¿Cómo escribes, en lenguaje algebraico, el costo de lso ocho cuadernos que compró Manuel?________________
3. ¿Y cuál sería el costo de tres bolígrafos? ¿Y el de su juego de geometría?________________
4. Con base en lo anterior, escribe ahora una sola expresión del costo de todo lo que compró Manuel.
5. De manera similar, puedes escribir otra expresión algebraica de lo adquierido por Tina.
6. Teniendo ya las dos expresiones anteriores, ¿cómo obtienes la expresión del costo total de los materiales de los dos hermanos?

FORMALIZACIÓN

Para sumar o restar polinomios, primero se realizan las operaciones dentro de los paréntesis, si los hay; después se simplifican los términos emejantes; estas operaciones pueden hacerse vertical u horizontalmente.

Al efectuar la multiplicación de dos polinomios se multiplica cada uno de los términos de un factor, por todos los del otro. Es importante aplicar la regla de los signos.

Finalmente se simplifican los términos semejantes. También esta operación puede hacerse verticalmente u horizontal.

El resultado de dividir un polinomio entre un monomio se obtiene sumando los cocientes de cada uno de los términos del polinomio entre el monomio.

Estos dos últimos casos, también es necesario aplicar las leyes de los exponentes vistas en la lección anterior.

Para dividir dos polinomios:

1. Se ordenan los términos de ambos polinomios, empezando con el de mayor grado a la izquierda.

2. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del polinomio divisor. Esto da como resultado el primer término del cociente, el cual se escribe sobre la galera.

3. Se multiplica el primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor; esto se resta del dividendo; se repite el procesos anterior.

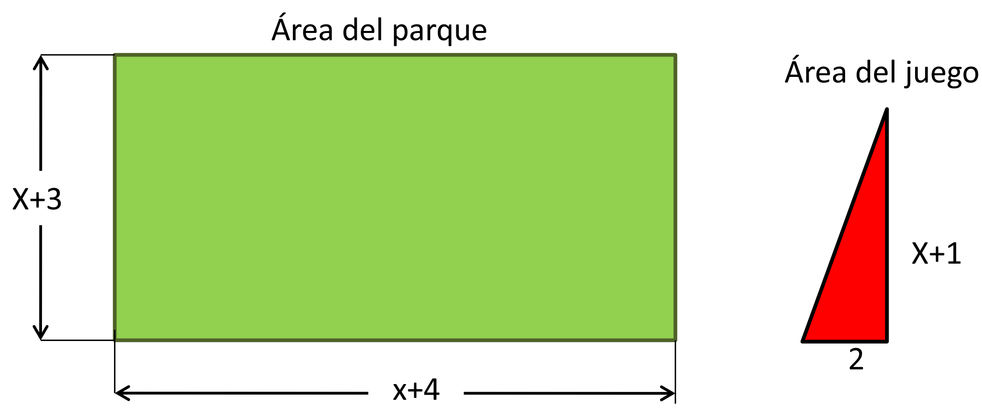
4. El residuo es ahora un nuevo dividendo; se repite el proceso anterior hasta que el residuo sea un polinomio de grado menor que el divisor.

Al hacer operaciones con polinomios es importante *comprobar* los resultados que obtengas:

a) suma y resta: se vuelve a efectuar la operación; en el caso de la resta se puede sumar al sustraendo con la resta o diferencia, para obtener el minuendo;

b) multiplicación y división: también se repite la operación; para la división, otra posibilidad es la de multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el residuo para obtener el dividendo.

En el terreno rectangular de un parque se van a instalar juegos infantiles, cada uno ocupará un área triangular con las medidas mostradas. El área de cada juego ya incluye espacio para que los niños caminen alrededor de ellos.



¿Cuántos juegos caben en el parque?

¿Cuánto espacio sobrará?

Primero debemos encontrar las áreas totales, tanto del parque como de cada juego. Después se dividen para obtener la respuesta.

El área del parque es:

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x+3 \\ \hline x^2+4x \\ 3x+12 \\ \hline x^2+7x+12 \end{array}$$

El área que ocupa uno de los juegos está dada por:

$$\frac{2(x+1)}{2} = x+1$$

(área de un tríángulo: base × altura ÷ 2).

Dividiendo el área disponible en el parque entre el área que requiere uno de los juegos infantiles, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+1 & x^2+7x+12 \\ & -x^2-x \\ \hline & \quad -6x+12 \end{array} \qquad \frac{x^2}{x} = x$$

$$\begin{array}{r|l} & x+6 \\ \hline x+1 & x+1\ x^2+7x+12 \\ & \quad -x^2-x \\ \hline & \qquad -6x+12 \\ & \qquad -6x-6 \\ \hline & \qquad\qquad 6 \end{array} \qquad \frac{6x}{x} = 6$$

El número de veces que cabe el área de un juego infantil en la superficie del parque, o el número de juegos que caben en el parque es________________.
El área sobrante en el parque (o área no utilizada por los juegos) es el residuo, o sea________________.
Para comprobar el resultado obtenido en este caso, llevamos a cabo una operación similar a la realizada con los números naturales y decimales:
cociente × ________________ + ________________ = dividendo

$$
\begin{array}{r}
x+6 \\
x+1 \\
\hline
x^2+6x \\
x+6 \\
\hline
x^2+7x+6 \\
+6 \\
\hline
x^2+7x+12
\end{array}
$$

EJERCICIOS

◇ Efectúa las siguientes adiciones y sustracciones. simplifica los términos semejantes, si los hay.

			Suma	**Resta**
	$4x+5xy$	$3x-2xy$		
	$3+2b$	$-5a-2b+2$		
$2ab$	$-5ab+2$	$-6ab+9ab$		
$-3r$	$-2\frac{r}{s}+s$	$5s-\frac{r}{s}+6r$		

◇ Realiza las multiplicaciones indicadas.

1. $(4a+3x)(4a-3x)=$
2. $(5xy-2y^2)(3x-2y)=$
3. $(2x^2-5x-1)(3x+4y)=$

◇ Lleva a cabo las divisiones siguientes. Comprueba los resultados que obtengas.

1. $(x^2-6x+4)\div 2x=$

2. $(4y^3 - 12) \div 4y =$
3. $(p^3 + 10p^3 - 3 \div 5p) =$

◇ Para cada par de polinomios, multiplica y divide. Comprueba tus resultados.

1. $3x^2 - 5;\ 3x - 4$
2. $y^2 - 6y - 2;\ 2y - 4$
3. $y^5 - 3y^4 + 4y^3 + 2y^2;\ y + 4$

LECTURA COMPLEMENTARIA:

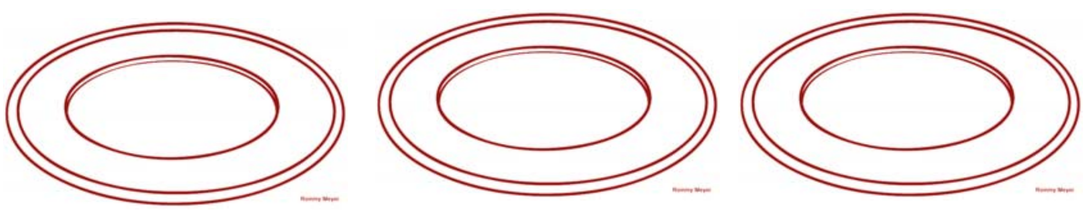
UN JUEGO

Acomoda tres platos en fila, uno al lado del otro. Después cuatro monedas en el plato de la izquierda. Las monedas deben ser de diferente tamaño; podrían ser, por ejemplo, de \$1, \$2, \$5, \$10. Ordénalas de mayor a menor tamaño, una encima de otra, de modo que la más grande quede abajo y la de menor diámetro arriba. El juego consiste en trasladar todas las monedas al tercer plato, el del extremo derecho, bajo las reglas siguientes:

1. Sólo puede cambiarse de plato una moneda a la vez.

2. Una moneda que se vaya a agregar a un plato, deberá colocarse sobre las que están ahí, si las hay; no está permitido colocar una moneda más grande sobre una de menor tamaño.

3. Provisionalmente se puede usar el plato de en medio para colocar monedas en él, siempre que se cumplan las reglas anteriores; pero al final todas las monedas deberán estar en el tercer plato, en el mismo orden en que estaban al principio, de mayor a menor.



CAPÍTULO 3

GUÍA DE EXAMEN

3.1. Presentación

La presente guía se elaboró con el propósito de proporcionarte un conjunto de elementos que te serán necesarios para llevar con éxito el curso propédeutico de habilidades verbales y matemáticas necesarias para ingresar a la Universidad Tecnológica de Xicotepec de Juárez.

El objetivo general de ésta guía, es integrar la información básica y necesaria, para que el aspirante a ingresar a la UTXJ, desarrolle capacidades, habilidades y destrezas, que favorezcan con mayor eficiencia la resolución del examen de ingreso y ubicación.

Aquí encontrarás conceptos, ejemplos y ejercicios que te familiarizarán con la estructura del examen de admisión y ubicación que te permitirán edificar las habilidades y la construcción de conocimientos que te faciliten la resolución del examen.

CÓMO UTILIZAR LA GUÍA DE ESTUDIO

Para que esta guía te sea de mayor utilidad, se te recomienda realizar en el orden indicado, las siguientes actividades:

1. Lee detenidamente esta guía, identificando claramente cada una de las partes y temas que la integran.

2. Recuerda que esta guía es un material de apoyo en tu preparación para el examen de admisión, pero es necesario que profundices en la bibliografía sugerida, además de otros títulos a los que tengas acceso.

3. Realiza los ejercicios que se te proponen. Se te sugiere contestar estos ejercicios en hojas blancas o en un cuaderno, esto con la finalidad de que dispongas del espacio necesario para desarrollar tus respuestas y si te equivocas en alguna de las respuestas, puedas borrar o utilizar otra hoja y así tu guía de estudio no se maltrate.

4. Cuando hayas terminado de contestar los ejercicios, verifica los procedimientos de solución incluidos en esta guía. Te sugerimos, que si obtienes alguna respuesta incorrecta, regreses al ejercicio y busques otra vía de solución.

5. Lee detenidamente las recomendaciones para presentar la prueba de práctica.

6. Compara tus respuestas con las que se te proporcionan en la clave de respuestas de los ejercicios propuestos. Es importante que consultes la clave de respuestas solamente cuando hayas terminado de contestar los ejercicios de práctica.

7. Lleva a cabo las actividades que se te sugieren para mejorar tu Habilidad Verbal y Matemática.

En este momento, ya debes contar con tu cuaderno donde contestarás los ejercicios, un lápiz, goma, juego de geometría, y un diccionario de la lengua española, además, mantener siempre un espiritú de compromiso y disponibilidad para el trabajo en equipo.

¡ADELANTE Y BUENA SUERTE!

CAPÍTULO 4

Habilidad Verbal

4.1. Definición

Es el conjunto de recursos vinculados al conocimiento lingüístico que, subsumidos a estrategias cognitivas, permiten procesar información lingüística para acceder a los significados explícitos e implícitos, superficiales y profundos de textos diversos.

Temas	**Subtemas**
Manejo preciso del lenguaje escrito	Palabra adecuada que complete el enunciado. Palabra que corresponda a la definición dada. Comunicación correcta de la ideas.
Análisis y síntesis de textos	Intención del autor en un texto dado. Ideas principales y secundarias de un texto.
Inferencia de ideas a partir de un texto	Moraleja adecuada al texto. Título adecuado al texto.
Uso correcto de antónimos y sinónimos	Sinónimo de una palabra dada. Antónimo de una palabra dada.
Uso correcto de analogías	Analogías verbales ó figurativas. Analogía implícita en la metáfora.

4.2. Ejemplos de habilidad verbal

El éxito de los estudios en el nivel superior está, sin lugar a dudas, estrechamente ligado a la habilidad verbal, esto es, la interpretación del significado del material escrito, la amplitud y profundidad del vocabulario y la comprensión de las relaciones entre las ideas. La prueba de habilidad verbal mide estos rasgos por medio de cuatro tipos de reactivos: selección de antónimos, complementación de enunciados, establecimiento de analogías y comprensión de lectura. Cada uno de estos tipos se ejemplifica y analiza a continuación.

Selección de antónimos (palabras de significado opuesto)

Los reactivos de este tipo miden la extensión y los matices del vocabulario, así como el proceso de razonamiento lógico que implica la búsqueda del significado opuesto. En cada reactivo, se presenta una palabra, para que el estudiante elija entre las cinco opciones que le siguen, aquella que tiene significado opuesto a esa palabra. El vocabulario que se utiliza en esta sección, incluye palabras que la mayoría de los egresados de nivel medio superior, deben conocer por haberlas presumiblemente encontrado en sus lecturas generales, aún cuando algunas no son de uso frecuente en el lenguaje cotidiano.

Ejemplos de reactivos de selección de antónimos

INSTRUCCIONES. Cada uno de los siguientes reactivos consta de una palabra impresa en mayúsculas, seguida de cinco opciones. Selecciona la palabra que es el antónimo (opuesto) de la palabra que aparece en mayúsculas. Como se requiere distinguir entre diversos significados, asegúrate de haber estudiado todas las posibilidades, antes de seleccionar la respuesta correcta.

1. TRABAJAR

   a) Holgar

   b) Fatigar

   c) Aliviar

   d) Hollar

   e) Festejar

   Veamos un proceso que pudiera seguirse al resolver el reactivo anterior. Recuerda que se busca el antónimo o significado opuesto. Necesitamos una palabra que comunique el sentido de descanso. Las respuestas D y E son claramente incorrectas ya que no poseen este significado. La respuesta C tampoco, puesto que busca una graduación de la actividad y lo que se pretende es la acción opuesta. La alternativa B es un vocablo que involucra trabajo. Por lo tanto, el proceso nos lleva a seleccionar a la A como la opción correcta, pues la palabra holgar significa descansar.

Complementación de enunciados

El segundo tipo de reactivo, requiere que se complete un enunciado al que le falta una o dos palabras. Esto es, se debe identificar la palabra que falta de entre una lista de cinco palabras y colocarla en el enunciado, de modo que le proporcione sentido lógico.

Ejemplo de reactivos de complementación de enunciados

INSTRUCCIONES. El enunciado que se presenta a continuación, tiene dos espacios en blanco. Cada espacio indica que se ha omitido una palabra. Debajo del enunciado hay cinco palabras señaladas con las letras A, B, C, D y E. Selecciona la palabra o palabras, que al colocarse en los espacios en blanco le proporcionen sentido lógico al enunciado.

2. Hoy en día no se han encontrado ejemplares de_______________ vivos, por lo tanto se cree que están_______________.

   a) Caballos.. corriendo

   b) Hombres .. durmiendo

   c) Dinosaurios ..extintos

   d) Osos .. invernando

   e) Mastodontes .. aislados

La primera parte del enunciado nos indica la alta posibilidad de que los animales a los que se refiere estén muertos. Sabemos que los caballos, los hombres y los osos no caen dentro de esta categoría, ello elimina las opciones A, B y D. No se encuentran ejemplares de mastodontes vivos, pero el suponer que están aislados no explica su ausencia, lo que elimina la opción E. Los dinosaurios también están muertos y el suponer que se han extinguido explica su desaparición. Por lo tanto, seleccionamos la opción C como la respuesta correcta.

Analogías

Los reactivos de este tercer tipo pretenden identificar la habilidad para encontrar relaciones en un par de palabras, entender las ideas que se expresan en esas relaciones y reconocer una relación similar o paralela con otro par de palabras. Algunas de los reactivos involucran relaciones de causa a efecto; clase a subclase, cualidad a símbolo, palabra a acción, palabra a sinónimo, aproximado con diferencias cualitativas o cuantitativas; otras piden que se haga una analogía desde una relación concreta y se lleva hasta una relación más abstracta y menos tangible, debe considerarse cada relación con actitud crítica antes de escoger la opción que corresponda a las condiciones planteadas en la analogía del par original.

Ejemplo de reactivos de establecimiento de analogías

INSTRUCCIONES. En el ejercicio que sigue, se presenta un par de palabras relacionadas, seguido de cinco pares de palabras precedidas por las letras A, B, C, D y E. Escoge el par que exprese una relación similar a la que se da en el par original.

3. PÁGINA es a LIBRO como:

   a) Tubería es a agua
   b) Pájaro es a aeroplano
   c) Caballo es a automóvil
   d) Alambre es a electricidad
   e) Instantánea es a película cinematográfica

Esta es una pregunta relativamente fácil, que engloba la relación entre las partes (página) y el todo (libro). Aún cuando las opciones A, B, C y D muestran relaciones entre cada par de palabras, la única opción que engloba la misma relación entre las partes y el todo es la E, ya que la película cinematográfica consta de una serie de instantáneas, de igual manera que un libro consta de una serie de páginas.

Comprensión de Lectura

El cuarto y último tipo de pregunta, mide la habilidad para comprender lo que se lee. Aproximadamente, la mitad del tiempo de la parte de Habilidad Verbal de esta prueba, se dedica a la comprensión de material impreso, debido a que es de primordial importancia que el estudiante de nivel superior entienda lo que lee y que lo haga con discernimiento. Las lecturas se toman de varios campos. La comprensión de lectura se mide en diferentes niveles. Algunos de los reactivos simplemente miden la comprensión del sentido básico de lo que se afirma explícitamente. Otros reactivos requieren que se interprete y analice lo que se lee. Hay aún otros reactivos que miden la habilidad para reconocer aplicaciones razonables de los principios u opiniones que expresa la lectura.

Ejemplo de reactivos de comprensión de lectura

INSTRUCCIONES. La lectura que se presenta a continuación, está seguida de reactivos basados en su contenido. Después de leer el pasaje, selecciona la respuesta correcta para cada reactivo. Resuelve todos los reactivos que se formulan después de la lectura, basándote en lo que ésta afirma o implica.

LECTURA

Las termitas forman sus colonias en los huecos de la madera o excavan galerías o túneles en la madera o en el campo. En ciertas épocas del año, enjambres de termitas reproductivas abandonan la vieja colonia y se dispersan. Después de su vuelo, se les caen las alas y machos y hembras juntos comienzan una pequeña excavación para construir un nuevo nido. En este periodo, tiene lugar el apareamiento y más tarde la hembra deposita e incuba los huevos y alimenta a la cría con saliva y otras secreciones. Así, queda fundada otra nueva colonia. Después del incubamiento, las 2 ninfas se alimentan a sí mismas y, también a, sus padres y la hembra y el macho originales, llamados la pareja real, realizan sólo la función de reproducción. En las primeras etapas de la colonia, las ninfas se desarrollan en tres castas, todas sin alas: 1) Una casta obrera, que se alimenta de madera o de productos de hongo y por regurgitación alimenta también a las crías y a otras castas; 2) una casta de soldados de cabeza grande, con función protectora de la colonia y de la pareja real; 3) una casta con función reproductiva que reemplaza a la pareja real, si ésta muere. Existen usualmente dos clases de sustitutos reproductivos, una con rudimentos de alas, formada por las que se llaman reinas secundarias y otras sin rudimentos de alas y muy semejante a las castas obreras, constituida por reinas de tercera forma. Las castas no reproductivas contienen machos y hembras, pero sus órganos sexuales son rudimentarios. En algunas especies, los soldados pueden ser reemplazados por una casta de individuos de cabeza voluminosa que tienen un hocico o trompa grande llamados narigudos, las cuales emiten un olor desagradable para liberarse de las enemigas. Después del florecimiento de una colonia, se producen generaciones periódicas de individuos reproductivos que se dispersan para formar nuevas colonias.

4. La idea central de la lectura es la:

   a) Reproducción de las termitas

   b) Importancia de las termitas en la economía

   c) Estructura social de las termitas

   d) Diferencia entre las termitas y otros animales

   e) Muerte y nacimiento de las termitas

Este reactivo va encaminado a examinar la habilidad del estudiante para identificar la idea central de la lectura. La opción A se refiere a un asunto incluido en la lectura, pero deja fuera muchas otras cosas importantes que se mencionan. Se rechaza por no abarcar totalmente el tema. Las alternativas B y D son completamente inadecuadas, ya que la lectura no discute estos asuntos. La opción E se rechaza por ser vaga e imprecisa. La lectura ciertamente habla de estos asuntos, pero es la descripción de la vida social de las termitas lo que constituye el tema central. Por lo tanto la respuesta correcta es la C.

4.3. Ejercicios para el desarrollo de la habilidad verbal

En este apartado se ponen a tu consideración una serie de ejercicios que te ayudarán, por un lado, a prepararte para contestar la prueba de práctica que se encuentra en esta guía y, por otro lado, te ayudarán a desarrollar tu Habilidad Verbal. Consta de 3 lecturas, se te pide que a partir de ellas realices una serie de actividades y, posteriormente, contestes los reactivos que tienen la misma estructura que los de la prueba de práctica, con el objeto de que te familiarices con ella.

Sugerencias para mejorar tu Habilidad Verbal

La Habilidad Verbal es una herramienta fundamental para quien realiza estudios del nivel superior, ya que además de facilitar la adquisición general de conocimientos, permite un mejor desempeño en las diferentes materias al facilitar también la correcta traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y, con ello, el planteamiento y solución de problemas.

Para desarrollar tu Habilidad Verbal, lo cual incrementará tus posibilidades de obtener mejores resultados, tanto en la prueba, como a lo largo de tu carrera, se te sugiere:

- ☞ Leer artículos de revistas de diferentes áreas del conocimiento (al menos uno diariamente).
- ☞ Identificar las palabras de las cuales desconoces su significado y localizarlo en un diccionario, regresando luego a leer el párrafo hasta que lo hayas entendido.
- ☞ Preguntarte acerca de cuál es la idea central de cada párrafo y de la lectura en general.
- ☞ Preguntarte acerca de otras ideas, que aunque no se encuentran explícitas en el párrafo, se pueden inferir de lo que en éste se plantea.
- ☞ Comentar con tus compañeros las ideas centrales y lo que se infiere de cada lectura.
- ☞ Seleccionar al menos una palabra de cada párrafo y buscar sus significados, sus sinónimos y antónimos.
- ☞ Construir párrafos en donde utilices las palabras que has aprendido.
- ☞ Escribir un resumen y síntesis de cada artículo.

ACTIVIDADES:

1. Lee el siguiente texto y busca en un diccionario las palabras que te sean desconocidas o las que te sean de difícil comprensión.

LECTURA I

La www o world wide web (red del mundo entero) es una colección de páginas gráficas que pueden ser accesadas a través de la computadora. Es necesario establecer una conexión a Internet, contar con un browser y varios programas de software para ir "on-line", es decir ver las páginas de la red. La web es, de hecho, un sistema global de servidores que dan soporte a y crean conexiones entre una serie de archivos escritos en un código especial. La mayoría de los registros contienen gráficas, audio y hasta video, y por medio de un sistema de hipertexto es posible navegar de un archivo a otro haciendo clic en los links o ligas (...) No todos los servidores de Internet son parte de la world wide web, pero la www se mueve a través de Internet . http significa hipertext transfer protocol o protocolo de transferencia de hipertexto. El hipertexto es el protocolo o modo de comunicación estándar de la red. (...)El http es el idioma que se usa en la www para ligar páginas y series de textos y multimedia, y permite a la aplicación de software localizar el archivo buscado que se alberga en otra computadora. La mayoría de los contenidos en la red están escritos en html, hipertext markuo language, un código relativamente sencillo que incorpora hipermedia para mostrar páginas o sites con texto, audio, video y elementos o animaciones gráficas.

Tomado de: Muy Interesante. Pilar S, Hoyos. Septiembre 2004, p. 92..

2. A partir de la lectura del texto, describe cuál es la idea central del mismo.
3. Busca en revistas, periódicos o páginas de Internet, textos relacionados con la lectura.
4. Con la lectura inicial y las lecturas encontradas, rescribe una nueva lectura.
5. Con la lectura que escribiste, haz un cuadro sinóptico en donde desarrolles brevemente las ideas principales del texto.

Reactivos

1. De acuerdo con el texto, ¿cuál de los incisos siguientes expresa la idea principal?
   a) ¿Qué es el Internet?.
   b) Lo más actual del Internet.
   c) ¿Por qué las direcciones de Internet comienzan con http//www.?
   d) La conexión de Internet.
   e) Las páginas web.
2. ¿Cuál de las siguientes palabras es el antónimo (opuesto) a posible?
   a) factible.
   b) permisible.
   c) utópico.
   d) dable.
   e) asequible.
3. Encuentra la relación que existe en el par de palabras que se te presentan en mayúsculas y encuentra entre las opciones marcadas con incisos, el par que exprese la misma relación original. INTERNET es a INFORMACIÓN como:
   a) Flecha es a ballesta.

b) Hule es a llanta.

c) Brújula es a orientación.

d) Carro es a gasolina.

e) Estufa es a gas.

4. Escoge entre las opciones marcadas con incisos, la palabra que consideres complementa correctamente el siguiente enunciado: El html es el ____________ que se utiliza en la www para encontrar páginas, textos, así como variedad de medios.

   a) Browser.

   b) Servidor.

   c) Link.

   d) Hipertexto.

   e) Idioma

ACTIVIDADES:

1. Lee con atención el siguiente texto y subraya las ideas principales.

LECTURA II

La palabra .ªjolote"se deriva del náhuatl axolotl, que significa "perro de aguaᴤ describe a un animal que nació cuando el dios azteca Xolotl, temiendo su inminente sacrificio, entró en el agua y fue transformado en la criatura que nosotros conocemos ahora, la cual ha sido llamada por los científicos Ambystona mexicanum.

(...) En los lagos y canales de Xochimilco remanentes de su hábitat natural, el ajolote existe en estado precario, amenazado por el desarrollo, la contaminación y especies voraces introducidas. (...) A pesar de ello, permanece en un único y poco estudiado ecosistema, el cual además es el albergue de otras especies endémicas (...) y un refugio para la vida silvestre. Debido a que se trata de una criatura con tales características genéticas, es importante mantener la estirpe silvestre en su hábitat natural.

Esta singular especie no cambia de una forma de vida que respira en el agua a una que lo hace en el aire. Llega a crecer hasta 25 cm. de largo y usualmente es de color oscuro, aunque existen también algunos especimenes albinos.

El axolotl (...) se desarrolla en Xochimilco, (...) que tiene una gran importancia para la flora y la fauna silvestres, cuyo valor natural y cultural fue motivo para que en 1987 la UNESCO la declarara Patrimonio Cultural de la Humanidad.

Tomado de: Muy Interesante. Pilar S, Hoyos. Junio 2004, p. 8.

2. Si encuentras palabras de difícil comprensión no olvides buscarlas en el diccionario.

Reactivos

1. De acuerdo con la lectura, ¿cuál es el origen del axolotl?
2. ¿Cuál es la principal característica de esta singular especie?
3. Actualmente el ajolote tiene poca estabilidad debido a:
    a) La presencia de otras especies endémicas.
    b) Su hábitat es un refugio para otras especies.
    c) La amenaza que representa la modernidad.
    d) Que el agua escasea en Xochimilco.
    e) La gran cantidad de basura que existe en el lugar.
4. ¿Cuál de las siguientes palabras es antónimo (opuesto) de remanente?
    a) Reserva.
    b) Resto.

c) Detrito.

d) Vestigio.

e) Totalidad.

5. A continuación se presenta en mayúsculas un par de palabras relacionadas entre sí, elige entre las cinco opciones presentadas el par que exprese una relación similar. **ECOSISTEMA es a BIOLOGÍA** como:

   a) Física es a Cinemática.

   b) Dermatología es a Cardiología.

   c) Oda es a narración.

   d) Balance es a Economía.

   e) Masa es a Química.

ACTIVIDADES:

1. Lee cuidadosamente el texto y numera los párrafos..

LECTURA III

Al ser el periódico un medio de comunicación multi e interdisciplinario, que trata de llegar al mayor número de lectores, incorpora dentro de su contexto aspectos que lo hacen más interesante, por lo que recurrió a la fotografía y la caricatura, con el objeto de ilustrar los acontecimientos y trabajos periodísticos de diversos géneros y así romper la monotonía de la letra impresa, dando a las publicaciones mayor atractivo.

La caricatura es en sí una modalidad del ingenio humano, realizada por un pintor o dibujante, que valiéndose de la exageración y hasta cierto punto la deformación, pone énfasis en los rasgos de alguna persona con el afán de satirizar, ridiculizar o censurar; en algunas ocasiones se persigue únicamente el humorismo.

La caricatura se remonta a tiempos antiguos, dibujos caricaturescos se ven en vasos griegos y ruinas romanas. En el Medioevo se observa en iglesias y catedrales.

Apenas se difundió en Occidente la técnica de grabado, el caricaturista pudo llegar a un público mayor. Por ello utilizó con frecuencia la xilografía y los diversos procedimientos del grabado en plancha metálica. La imprenta, en general, favoreció el cultivo de la caricatura, que se utilizó a menudo como arma de combate en la época de la Reforma y las disputas teológicas y más tarde como propaganda política.

Conviene destacar que en España sobresalió Goya, a quien se le considera como el genio de la caricatura, por la ironía que desplegaba con extraordinaria potencia.

La invención de la litografía, mediante la cual se ilustraron tanto periódicos humorísticos, fomento el desarrollo de la caricatura en el siglo XIX, motivo por el cual adquirió mayor importancia.

Al hablar de caricatura merece citarse al célebre caricaturista mexicano, José Guadalupe Posadas, que se inició en el dibujo y a la postre aprendió litografía y grabado. Hizo caricaturas para el periódico Jicote y conviene destacar que interpretó la vida y las actitudes del pueblo mexicano a través de calaveras lo que le dio un estilo distintivo: el representar la vida a través de la muerte.

Flores Rosales, Gilda. Revista Avance y Perspectiva, Volumen 22, Ene-Feb 2003. México.

2. Subraya las palabras de difícil comprensión y busca en el diccionario su significado.
3. Subraya las ideas principales.
4. Elabora el resumen correspondiente.

Reactivos

1. Es el objetivo por el cual el periodismo recurre a la caricatura:
    a) Romper con la monotonía.
    b) Dar mayor veracidad a la noticia.
    c) Ilustrar los acontecimientos.
    d) Llegar a mayor número de lectores.
    e) Ser un medio interdisciplinario.
2. La caricatura se define en el texto como:
    a) Modalidad del ingenio humano.
    b) Exageración y deformación de hechos.
    c) La crítica de los hombres públicos.
    d) El énfasis de los rasgos de una persona.
    e) La expresión de la sátira, el ridículo o la censura.
3. Indica uno de los elementos mediante el cual el caricaturista logra abarcar mayores sectores.
    a) Xilografía.
    b) Plancha metálica.
    c) Litografía.
    d) Imprenta.
    e) Grabado.
4. A Goya se le consideraba el genio de la caricatura, porque representaba:
    a) Política.

b) Crítica.

c) Comicidad.

d) Burla.

e) Censura.

5. El estilo de Posadas, por el tipo de caricaturas que empleaba y la manera como representaba la vida, se considera:

   a) Costumbrista.

   b) Social.

   c) Contradictorio.

   d) Burlesco.

   e) Mexicano.

6. ¿Cuál es el antónimo de monotonía?

   a) Igualdad.

   b) Variedad.

   c) Acoplamiento.

   d) Exclusividad.

   e) Uniformidad.

7. ¿Cuál es el antónimo de favorecer?

   a) Defender.

   b) Propiciar.

   c) Molestar.

   d) Obstaculizar.

   e) Vejar.

8. ¿Cuál es el antónimo de ingenio?

   a) Torpeza.

   b) Maña.

   c) Destreza.

   d) Talento.

   e) Iniciativa.

9. ¿Cuál es el antónimo de ironía?

   a) Burla.

b) Sarcasmo.

c) Mordacidad.

d) Cólera.

e) Adulación.

10. Este pintor español es considerado como el ____________ más importante de la caricatura, ya que manejaba la ____________ de manera extraordinaria.

a) Precursor-sinceridad.

b) Líder-franqueza.

c) Talento-mordacidad.

d) Creador-bondad.

e) Iniciador-seriedad.

11. Para que la caricatura pudiera masificarse, los artistas se valieron del ____________y de la ____________.

a) Xilófago-fotografía.

b) Daguerrotipo-litografía.

c) Dibujo-imprenta.

d) Humorismo-monotonía.

e) Xilografo-plancha metálica.

12. ¿Cuál de las siguientes palabras, al colocarse en el espacio en blanco, completa correctamente el enunciado? La caricatura tiene su origen en la época ____________ y permitió la elaboración y diseño de dibujos que se ven en utensilios griegos así como en construcciones romanas.

a) Antigua.

b) Oscurantista.

c) Renacentista.

d) Moderna.

e) Contemporánea.

13. La____________ y las ____________ son características del pueblo mexicano, mismas que un caricaturista de ese país destacó a través de las calaveras.

a) Conducta-costumbres.

b) Danza-bondades.

c) Política-finanzas.

d) Educación-tradiciones.

e) Vida-actitudes.

14. ¿Cuál de las siguientes palabras es sinónimo de humorismo?

    a) Displicencia.
    b) Mesura.
    c) Jocosidad.
    d) Formalidad.
    e) Comedimiento.

15. ¿Cuál de las siguientes palabras es sinónimo de censurar?

    a) Tolerar.
    b) Condescender.
    c) Admitir.
    d) Permitir.
    e) Juzgar.

16. ¿Cuál de los siguientes pares de palabras guardan una relación semejante a la del par que se indica en letras mayúsculas? LETRAS es a ALFABETO como:

    a) Martes a viernes.
    b) Martillo a clavo.
    c) Abeja a enjambre.
    d) León a ferocidad.
    e) Abogado a ley.

17. ¿Cuál de los siguientes pares de palabras guardan una relación semejante a la del par que se indica en letras mayúsculas? PINTOR es a ARTE como:

    a) Dedo a mano.
    b) Dolor a grito.
    c) Altura a edificio.
    d) Piedra a honda.
    e) Geriatra a medicina.

18. ¿Cuál de los siguientes pares de palabras guardan una relación semejante a la del par que se indica en letras mayúsculas? IMPRENTA es a MÁQUINA como:

    a) Hígado a órgano.
    b) Tiburón a mar.
    c) Biólogo a microscopio.
    d) Torear a plaza.
    e) Pan a horno.

4.4. Tomando decisiones

SITUACIÓN PROBLEMA:

Jaime y su familia están planeando una visita a los abuelos que viven en una población a 295 km de distancia. Para tomar la mejor decisión analizan las opciones que tienen:

Opción A: Usar el automóvil familiar. Éste puede alcanzar una velocidad promedio de 70 km/h, su rendimiento (es decir, los kilometros que pueden recorrer por cada litro de gasolina consumido) es de 10 km/l y el costo actual de la gasolina es de $3.12 por litro.

Opción B: Viajar en autobús. La velocidad promedio es de 50 km/h y el pasaje cuesta $21.50 por persona.

- ¿Cuál es la mejor decisión si lo que quieren es llegar rápido?
- ¿Cuál es la opción más barata? ¿Es independiente del número de viajeros?
- ¿Cuál es la mejor decisión si sólo va Jaime con su Padre? ¿Y si van el padre, la madre y los dos hijos?

ESTRATEGÍA DE SOLUCIÓN

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. ¿Existirá una sola respuesta?, ¿de qué depende? Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1.- Sin hacer ninguna operación aritmética, haz una estimación del tiempo que se requiere para realizar el viaje en automóvil y en autobús. Recuerda, una estimación no es un resultado exacto, sólo nos da una idea de los valores aproximados. Piensa por ejemplo que la distancia que deben viajar es de casi 300 km, si el autobús recorre 50 kilómetros cada hora, en dos horas recorrerá 100 km, ¿cuánto tardará en recorrer los 300 km? Si el padre de Jaime tuviera que llegar muy rápido a casa de los abuelos, ¿cuál será la mejor opción?

2.- Analiza el tipo de operaciones que debiste realizar en el inciso anterior después de redondear la distancia y prueba esas mismas operaciones con los números exactos para calcular el tiempo de una y otra opción. ¿Se parecen tus resultados a los estimados?

3.- Si el automóvil recorre 10 kilómetros por cada litro de gasolina que consume, haz una estimación de cuantos litros necesitará para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitará para recorrerr 300 km? Recuerda las reglas para operar rápidamente con los múltiplos de 10 (10, 100, etcétera).

4.- ¿Qué tuviste que hacer para estimar el resultado anterior? Con el mismo razonamiento, calcula cuantos litros de gasolina se requieren pa recorrer 295 km. ¿Cuánto costaría el trayecto si cada litro cuesta \$3.12?

5.- ¿Cuánto costaría el viaje en autobús si sólo va una persona?, ¿si van dos? ¿Hasta cuántas personas conviene más una opción que otra?

6.- ¿Qué factores deben tomarse en cuenta para elegir una opción?, ¿crees que haya una única respuesta?

FORMALIZACIÓN

Muchas veces, optar por una elección conveniente en nuestras actividades cotidianas implica realizar unas cuantas operaciones aritméticas con números naturales y decimales. Ésta es una buena razón para que todos logremos habilidad para operar aritméticamente: estimando los resultados, aproximándolos o calculándolos de manera exacta; mentalme nte, con lápiz y papel o usando una calculadora. Las matemáticas van a estar simpre presentes en tu vida. Sin embargo, las matemáticas no nos dan, por ellas mismas, todas las respuestas; éstas dependen de otros factores que no podemos traducir a términos matemáticos: nuestras necesidades, nuestros gustos, nuestras motivaciones, nuestros valores.

APLICACIÓN

¿Puede pensar una computadora?

Se ha dicho que las computadoras son “cerebros electrónicos”, capaces de pensar; porque en ocaciones pueden tomar decisiones. Estas decisiones están basadas en ciertas operaciones aritméticas que la computadora puede realizar. El siguiente juego da una idea cómo “decide” una computadora. Copia el diagrama y sigue las instrucciones que se indican. Compara tu resultado final con el de tus compañeros y discute con ellos por qué son diferentes.

EJERCICIOS

- ¿Qué números naturales pueden susutituir a a, b y c para que las operaciones siguientes estén correctas?, ¿son únicas las soluciones?

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & a \\
 & b & b & b \\
+ & b & b & b \\
 & b & b & b \\
 & b & b & b \\
\hline
a & b & b & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & a & a & a \\
- & b & b & b \\
\hline
 & c & c & c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & a & a & a \\
X & & b & b \\
\hline
 & a & a & a \\
 & a & a & a \\
\hline
a & c & c & a
\end{array}
$$

- Empleando sólo cuatro veces el número 4 y una combinación de las cuatro operaciones aritméticas básicas, encuentra expresiones aritméticas para cada uno de los números naturales del 1 al 10. Por ejemplo, el número 6 se puede escribir como $6 = 4 + \frac{4+4}{4}$.
- La siguiente es la lista de ofertas del almacén de ropa Todo de mezclilla.

Prenda	**Precio regular($)**	**Oferta ($)**
Camisetas decoradas	30.00	27.90
Pantalón de mezclilla	75.00	68.95
Suéter	62.50	56.75
Zapatos tenis	95.00	83.60
Calcetines	8.50	6.75

1. Si tienes \$150.00 y quieres comprar dos camisetas y un pantalón:
   a) ¿Cuánto te costarían?
   b) ¿Cuánto ahorras con los precios de oferta?
   c) ¿Cuánto te sobra?
   d) ¿Qué puedes comprar con lo que te sobra?
2. Imagina que quieres comprar unos zapatos tenis, dos pares de calcetines y un suéter:
   a) ¿Te alcanzarìa con \$170.00? Da una respuesta rápida.
   b) Aproximadamente, ¿cuánto gastarías?
   c) ‘?Cuánto te costarían si los compraras a precio regular?
   d) Si sólo tienes \$100.00, ¿cuáles prendas de las que necesitas puedes comprar? ¿Es única tu respuesta?
3. ¿Cuánto gastarías si compras uno de cada uno?, ¿cuanto ahorraría respecto al precio normal? ¿Cuánto ahorras por cada peso gastado?

LECTURA COMPLEMENTARIA:

¿QUÉ ES UNA COMPUTADORA?

Una computadora es un aparato electrónico que procesa información. Existen computadoras enormes, capaces de realizar millones de operaciones simultáneamente y computadoras personales (también conocidas com PC)que se emplean en las oficinas, las escuelas y los hogares. A una computadora se le sumistran instrucciones y datos; la máquina procesa los datos de acuerdo con las instrucciones y produce un resultado. La computadora se utiliza para manipular muchas formas de información: datos numéricos, textos gráficas, música, sonidos, movimientos de imágenes, señales telefónicas, etc. Estos aparatos pueden realizar operaciones matemáticas con gran rapidez, trazar gráficas, dibujar figuras geométricas y moverlas en la pantalla. Los datos y las instrucciones originales se introducen a la computadora en un lenguaje especial, llamado *lenguaje de computación;* existen muchos de estos lenguajes, de los más conocidos son el *Fortran*, el *Basic*, el *Logo*, el lenguaje *C*. Un *programa de computación* es una lista de instrucciones que la computadora debe seguir en orden al procesar los datos. A quienes se encargan de escribir estos programas de computación se les conoce como *programadores.* Sin embargo, muchos de estos programas se pueden adquirir comercialmente y quienes los usan en su PC no necesitan conocer ningún lenguaje de computación. Seguramente tú conoces algunos programas, hay juegos, libros interactivos, enciclopedias y programas para facilitar el estudio de las materias escolares. En una primera aproximación, las instrucciones que aparaecen en el programa de computación se descodifican y ejecutan una por una en una unidad de procesamiento central conocida como CPU por susu siglas en inglés *(Central Processing Unit)*, la información y los resultados del proceso se almacenan en discos magnéticos que pueden estar fijos, dentro de la computadora, o bien pueden ser portátiles, lo que permite llevar la información de una computadora a otra.

CAPÍTULO 5

HABILIDADES MATEMÁTICAS

5.1. Definición

La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

La habilidad matemática se entiende como el conjunto de recursos vinculados al conocimiento matemático que, subsumidos a estrategias cognitivas, permiten al sujeto procesar información aritmética y geométrica para resolver problemas en el ámbito representacional de la matemática.

Temas	**Subtemas**
Jerarquización u orden cronológico de eventos.	Series de secuencias figurativas dadas. Series de secuencias numéricas presentadas. Identificación de la regla presente en las series figurativas.
Reconocimiento de patrones numéricos y espaciales.	Secuencia numérica en una serie dada. Error en la serie numérica dada.
Deducciones simbólicas a partir de relaciones espaciales.	Secuencia figurativa en las series. Complementación de las imágenes dadas a partir de un conjunto de piezas aisladas presentadas.

Los problemas que a continuación se muestran pretenden ser sólo un ejemplo del tipo de situaciones a resolver que se presentarán en el curso de Habilidades Matemáticas, pueden incluso ser utilizados en la preparación de los alumnos que participarán en un curso propedeútico. Se presentan con la intención de orientar el enfoque del curso ya que, a diferencia de la confrontación académica que incluye una parte de matemáticas y su enfoque se apega más a los contenidos de los programas, el curso de habilidades matemáticas se centra en la recuperación del nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales referidas en la currícula de matemáticas, aún cuando también se consideran los contenidos del nivel educativo y grado correspondiente. Dentro de las habilidades matemáticas que se desarrollan en la educación básica se encuentran las siguientes:

- **CÁLCULO MENTAL.** Realización de operaciones por vías distintas a los algoritmos convencionales. No requiere de papel y lápiz.
- **ESTIMACIÓN.** Determinación razonable de una solución.
- **IMAGINACIÓN ESPACIAL.** Representación gráfica de figuras, trazo y/o construcción. Traducción de relaciones aritméticas-algebraicas-geométricas.
- **RAZONAMIENTO LÓGICO.** Análisis de razonamientos para detectar, corregir y completar los que son erróneos o incompletos.
- **GENERALIZACIÓN.** Análisis de los aspectos comunes e identificación de los esquemas generales de una situación y de los procedimientos de solución. Conjetura.
- **FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO.** Experimentación de diversos procedimientos para llegar a una respuesta en particular.
- **REVERSIBILIDAD DE PENSAMIENTO.** Comprensión y reconstrucción de procedimientos que involucran razonamientos en forma progresiva y regresiva.

5.2. Ejemplos de habilidad matemática

Dinámica

Resolución de problemas

☞ Comprender el problema. Supone percibir y representar la incógnita, retener y recuperar alguna información relacionada.

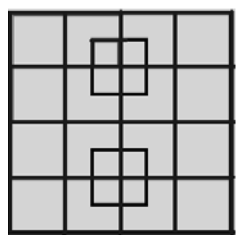
☞ Idear un plan. Uso del orden y la clasificación de las acciones orientadas hacia el resultado final.

☞ Ejecutar un plan. Requiere interpretar los resultados parciales, así como monitorear los avances y retrocesos.

☞ Verificar resultados. Evaluar el proceso y estar en condiciones de aplicarlo en otro contexto.

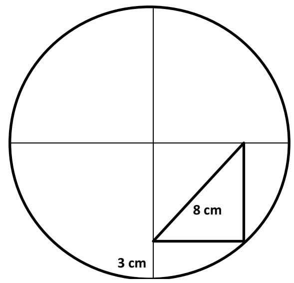
ACTIVIDAD.-Mediante una lluvia de ideas proponer las soluciones de manera oral de los siguientes ejercicios:

1. Por qué los peluqueros de Villa Juárez prefieren cortar el pelo a 10 gordos antes que a un flaco?
2. Si un hombre hace un agujero en una hora y 2 hombres hacen 2 agujeros en 2 horas. ¿Cuánto tardará un hombre en hacer medio agujero?
3. Yendo yo para Villavieja, me cruce con siete viejas, cada vieja llevaba siete sacos, cada saco siete ovejas ¿Cuántas viejas y ovejas iban para Villavieja?
4. Divide 30 entre $\frac{1}{2}$ y luego súmale 10, ¿cuál es el resultado?
5. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



6. Un hombre tiene 4 cadenas, cada una de ellas está formada por 3 eslabones. Quiere unirlas para formar una única cadena cerrada. Abrir cada eslabón le costará 20 pesos y cerrarlo \$30. Tras pensar un poco, consiguió que, al final, unir sus cadenas sólo le costará \$150. ¿Cómo lo consiguió?

7. Teniendo en cuenta la figura, hallar el radio del círculo.



Conocimiento es poder

☞ Aprender es probar y aplicar los conocimientos aprendidos.

☞ Ser capaz de encontrar aplicaciones novedosas.

☞ Descubrir el sentido lúdico y aplicado de las habilidades.

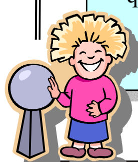
☞ En la escuela, en cuanto aprendemos algo, enseguida nos mandan a aprender otra cosa, sin dejarnos disfrutar de lo aprendido ni aplicarlo como se merece.

☞ El aprendizaje no significa pasar de no saber a saber, sino poder hacer algo con lo aprendido: relacionar, explicar, comparar, criticar y, de manera especial, cambiar y modificar la realidad.

Dinámica

ACTIVIDAD.- Antes de analizar lo siguiente, imagina una manera de resolver los problemas. Discútelos con tus compañeros y con tu profesor.

… ALGO PARA PRIMER GRADO



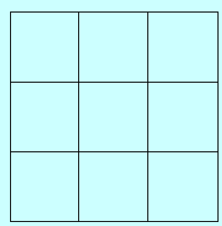
1. Si para repartir un pastel entero se cortan trozos de ¼ del total que va quedando, ¿qué parte del pastel queda después de cortar el cuarto trozo?

2. Una caja para 3 mil canicas está llena con canicas de 10 colores distintos. Al azar se van sacando canicas de la caja. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deberé sacar para garantizar que en la colección tomada hay cuando menos cien canicas de un mismo color?

3. Si a cierto producto le cargan el 15% de impuesto y después, por promoción le aplican un 15% de descuento, ¿cuál es el porcentaje del precio original que se tendrá que pagar?

4. Calcula la suma de
$2 + 4 + 6 + \ldots + 58 + 60 =$

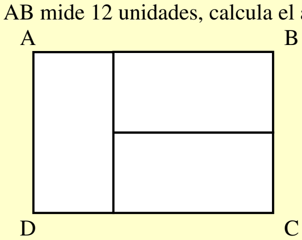
5. Con los números del 1 al 9 forma diez de los 72 cuadrados mágicos, donde en cada renglón y columna la suma sea 15.



6. Cierto producto pasa por dos intermediarios antes de llegar al consumidor. De la fábrica sale con un precio de 200 pesos más 15% de impuesto. Cada intermediario le carga un 20% como ganancia y después le aplica el 15% de impuesto. ¿A qué precio lo tendrá que pagar el consumidor?

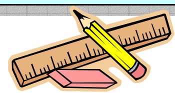
7. Si escribo los primeros doscientos números naturales, ¿cuántas veces se repite el dígito 7?

8. Como se muestra en la figura, con tres rectángulos iguales se formó un rectángulo más grande. Si la longitud AB mide 12 unidades, calcula el área del rectángulo ABCD.



… ALGO PARA SEGUNDO GRADO

1. La suma de tres números impares consecutivos es 99. Encuentra el mayor de esos tres.



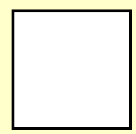
2. A una varilla se le hacen dos tipos de marcas: unas para obtener cuatro trozos de la misma longitud y otras para tener tres trozos de la misma longitud. Si la varilla se corta en cada una de las marcas hechas, ¿qué parte de la unidad representa el trozo de menor longitud?

3. Si 2932 pesos equivalen a 200 euros y 50 dólares americanos equivalen a 570 pesos, ¿a cuántos euros equivaldrán 75 dólares?

4. Calcula la suma de $4^5 + 2^{10} + 8^3$

5. Mi abuelo tiene menos de 80 años. El año en que nació es múltiplo de 5; ninguna de sus cifras es cero y la suma de sus cuatro dígitos es 18. ¿Qué edad tiene mi abuelo?

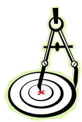
6. Si la medida de los lados de un cuadrado se aumenta en 50%, ¿cuánto aumenta el área del cuadrado?



7. Escribe todos los divisores mayores que 50, que tiene el número equivalente a 2^{10}

8. Calcula el resultado de
$51 - 49 + 47 - 45 + 43 - 41 + \ldots + 3 - 1 =$

… ALGO PARA TERCER GRADO



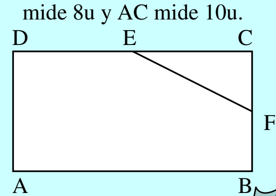
1. Un círculo está inscrito en un cuadrado, y éste está inscrito en otro círculo. Si el diámetro del círculo menor mide 10cm, calcula el área del círculo mayor.

2. En el teatro de la localidad hay dos secciones de asientos; en la primera los boletos cuestan \$65 y en la segunda \$45. Si en la función de ayer entraron 60 personas y se recaudaron \$3240, ¿cuántas personas pagaron boleto para la primera sección?

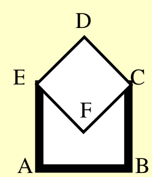
3. Un salón de baile tiene tres paredes del mismo tamaño. Un pintor tarda 3 horas en pintar una pared, mientras que otro tarda 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en pintar la otra pared?

4. Si de un pastel de forma circular se quita el 12%, ¿cuánto mide el ángulo central de la parte que se quitó?

5. Considera el rectángulo ABCD y calcula la longitud de la línea EF, sabiendo que E es el punto medio de CD; F es el punto medio de BC; AB mide 8u y AC mide 10u.

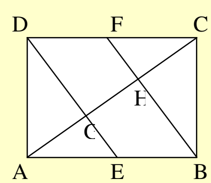


6. Calcula el área del cuadrado CDEF, si el área del cuadrado ABCE es 196 u^2



7. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 unidades. Si el perímetro del triángulo es de 36 unidades, calcula su área.

8. En el rectángulo ABCD, E es el punto medio de AB y F es el punto medio de CD. Se sabe que CD mide 8cm y que AD mide 5cm. Si G y H son los puntos de intersección de ED y BF con la diagonal AC, calcula el área del cuadrilátero GHFD.



5.3. Ejercicios para el desarrollo de habilidades matemáticas

Sugerencias

1. Antes de intentar resolver cada ejercicio lee cuidadosamente su enunciado.

2. Identifica si se trata de un ejercicio para calcular un valor, una relación o demostrar una afirmación.

3. Identifica los datos que se te proporcionan y los datos que debes encontrar.

4. Con base en los datos identificados, plantea una forma para llegar a la solución.

5. Desarrolla la forma elegida y corrobora haber obtenido la solución correcta, con base en las respuestas obtenidas por tus compañeros. De no ser así, busca otra vía de solución y regresa a confirmar tu respuesta.

Aspectos aritméticos

1. Gotardo se le ha asignado realizar tres sistemas de cómputo en 120 hrs. laborables. Cada uno de ellos tiene diferente grado de dificultad, para el primero le debe dedicar una tercera parte del total del tiempo disponible, par el segundo requiere 20 horas y para el tercero el resto del tiempo. Sin embargo el se enferma y no puede continuar con el tercer sistema, por lo que se le turna el sistema a Maura y ella solicita una prórroga de $\frac{1}{12}$ del tiempo asignado para éste. ¿Cuántas horas requiere de más Maura para realizar este sistema de cómputo?

2. Se realiza la inauguración de un centro comercial y por ello se ofrecen las siguientes ofertas: en la línea de aparatos eléctricos un 5 % de descuento, para el departamento de abarrotes del 8 % y jardinería un 10 %.

   Jonás decide aprovechar las ofertas y compra un minicomponente de \$6,000.00, abarrotes por un monto de \$300.00 y de Jardinería \$500.00. ¿Qué porcentaje se ahorro Jonás en la compra?

3. Mariana y Lupita entran a una competencia de atletismo, por las experiencias de las competencias anteriores, se tiene considerado que las posibilidades de Mariana con respecto a Lupita son de 3 a 1. ¿Qué porcentaje de ganar tiene Mariana?

4. En una empresa se evalúo a sus trabajadores, las calificaciones obtenidas se muestran a continuación:

Calificación	No. de trabajadores
6	4
7	5
8	5
9	4
10	3

a) ¿Qué porcentaje de trabajadores obtuvieron la calificación más cercana al promedio?

b) ¿Qué porcentaje de trabajadores obtuvieron la calificación abajo del promedio?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores obtuvieron la calificación arriba del promedio?

5. La sección de fumadores de un restaurante está compuesta por 10 mesas de cuatro sillas cada una, mientras que la de no fumar consta de 4 mesas, dos de ellas con cuatro sillas y las restantes con dos sillas.

   a) Si se presentan 60 comensales simultáneamente y no exigen sección en especial, ¿cuántos comensales quedarán de pie?

   b) Si de los 60 comensales, 52 eligen sección de fumadores y 8 piden sección de no fumar, ¿cuántos comensales quedarán de pie en cada sección? ¿Cuántos lugares sobran en cada sección?

6. Un automovilista debe ir de la ciudad A a la ciudad B. Partiendo de A a las 10:00 hrs., con una velocidad promedio de 100 km./hr. y llega a la ciudad B 5 horas después, ¿cuántos kilómetros recorrió el automovilista?

7. El salario mensual (30 días) de María es de $ 3,600.00, ¿cuál será su pago por cinco días laborables?

8. Si Juan gana $ 30.00 la hora laborada y trabaja 5 días, ocho horas diarias, ¿cuál será su paga si le descuentan por impuestos el 25 % del salario devengado?

9. Un granjero tiene 8 vacas lecheras, las cuales le proporcionan 24 litros de leche diariamente, con el 75 % del total de leche el granjero produce 30 quesos y con la leche restante produce 4 kilos de mantequilla.

   a) ¿Cuánta leche obtendría el granjero si tuviera 12 vacas?

   b) Con esa cantidad de leche, ¿cuántos quesos y kilos de mantequilla podría producir?

   c) ¿Cuántas vacas necesita el granjero para producir 15 quesos y 2 kilos de mantequilla?

10. De los números $\sqrt{3}$ y $\frac{3}{\sqrt{3}}$, ¿cuál es el mayor?

11. ¿Qué relación de orden se establece en $1\frac{3}{7}$ y $\frac{3}{2}$?

12. ¿Qué relación de orden puede establecerse entre las alturas de Rosa y Juan, si se sabe que Rosa es mayor que Miguel y que Juan es menor que Miguel?

13. Al registrar las temperaturas en las ciudades A, B y C, el día de hoy a la misma hora, se observó que la ciudad A y B registraron la misma temperatura y la ciudad C tuvo una temperatura más baja que la ciudad B. En la ciudad A, se registró una temperatura menor que 0°. ¿Cómo es la temperatura de la ciudad C con respecto a la de la ciudad A?

14. ¿Cuál es el valor de $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{-3}{5}\right)}$?

15. ¿Cuál es el valor de $1-\frac{2}{3}$?

16. ¿Cuál es el valor de $1-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$?

17. ¿Cuál es el valor de $1-\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1}$?

18. ¿Cuál es el valor de k en la secuencia $3, 9, 27, 81, k$?

19. ¿Cuál es el valor de m en la secuencia $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, m$?

20. ¿Cuál es el valor de k en la secuencia $501, 6002, 70003, 800004, k$?

21. ¿En la ciudad de México, durante el día se registraron las siguientes temperaturas $8°, 10°, 12°, 18°$. ¿Qué temperatura promedio se registró al día?

22. En un hormiguero habitan 200 hormigas, todas las hormigas transportan aproximadamente 6000 semillas al hormiguero diariamente.

    a) ¿Cuántas semillas transporta en promedio cada hormiga?

    b) De acuerdo a la siguiente tabla, ¿cuántas semillas son transportadas al hormiguero al día?

Día:	Número de semillas transportadas:
1	5930
2	6105
3	5890
4	6005
5	6090

    c) Tomando en cuenta el resultado anterior, ¿cuántas semillas habrán transportado aproximadamente después de 250 días?

    d) De las 200 hormigas, 80 son rojas y grandes y 120 son negras y pequeñas, las primeras transportan 3840 semillas de las 6000 semillas, ¿cuántas semillas transporta al día, en promedio, cada hormiga de las negras y pequeñas?

Aspectos algebraicos

1. ¿Cuál es el valor de x sí $x+s+r=30$ y $r=10-s$?

2. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $3x+8=-2x-17$?

3. Si $3\frac{2}{5}+6\frac{3}{5}-x=0$ ¿cuál es el valor de x?

4. Encuentra el conjunto solución de $3x-5=4-2x$.

5. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $\frac{3}{7}(4x-7)=2x-5$?

6. Si $f(x)=2x-3$, encuentra los valores que toma la función cuando:

    a) $x=0$

b) $x = 2$

c) $x = 5$

7. Al dividir $16a^9 + 20a^5$ entre $4a^2$, ¿qué se obtiene?

8. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{5x+9}} = 1$

9. Desarrolla $\left(\frac{3x}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^3$

10. Desarrolla $\left(\left(\frac{x}{y^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

11. Si n mesas iguales pesan juntas x Kg., ¿cuál es la expresión que representa el peso de 10 de esas mesas?

12. ¿Cómo puede expresarse el área de un rectángulo, si su largo A aumenta 5 unidades y su ancho B disminuye 4 unidades?

13. Cuántos galones de un líquido que tiene el 74% de alcohol, deben ser combinados con 5 galones de otro líquido que tiene el 90% de alcohol, para obtener una mezcla de 84% de alcohol?

14. Encuentra tres números enteros consecutivos para los cuales su suma sea 72.

15. Al sumar dos números, obtenemos un resultado 4 veces mayor que el número menor. Por otro lado, cuando al número menor le sumamos 15 y al mayor le restamos 13, obtenemos que sus resultados son iguales. Encuentra los números.

16. ¿Qué relación de orden puede establecerse entre $x^{\frac{1}{3}}$ y $x^{\frac{-1}{3}}$ sí $x > 1$

17. Si x es un número mayor que 0 y menor que 1, ¿cómo es x respecto a x^2?

18. Si tienes las tres funciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned} A \longrightarrow y &= x - 1 \\ B \longrightarrow y &= 7 - x \\ C \longrightarrow y &= \frac{x+5}{2} \end{aligned}$$

a) Si $x = 0$, ¿cuál de las tres funciones es mayor y cuál es menor?

b) Si $x = 3$, ¿qué función tiene el mayor valor?

c) ¿Qué funciones son mayores cuando $x = 4$?

d) ¿Cuál es el valor de x para el cual A y C son iguales?

e) ¿Qué relación de orden mantienen las 3 funciones entre sí, cuando $4 < x < 7$?

f) ¿Qué función es menor sí $x = 7$?

19. Si $f(x) = x^2 + x - 2$, encuentra:

    a) $f(-2)$

    b) $f(0)$

    c) $f(3)$

20. La ecuación $5x^2 + 15x = 0$, se puede factorizar como $5x(x+3) = 0$, ¿cuáles son sus raíces solución?

21. ¿Cuáles son las raíces solución de la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$?

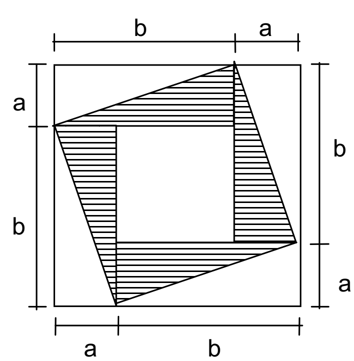
22. ¿Cuál es el producto de $(3x - 2y)(3x + 2y)$?

23. Factoriza la expresión $4a^2 + 28a + 49$.

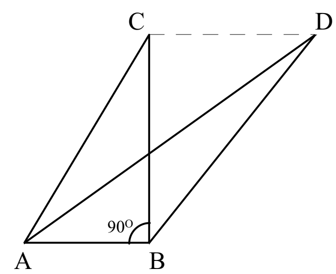
Aspectos geométricos

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo, cuyo perímetro es igual a 20 mts y uno de sus lados mide 4 mts?

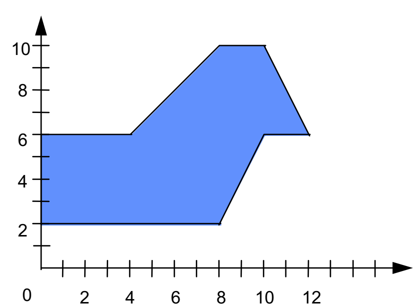
2. Obtén el área de la región sombreada de la figura siguiente:



3. Los triángulos ABC y ABD son tales, que AB y DC son rectas paralelas, demuestra que sus áreas son iguales.



4. ¿Cuál es el área de la región sombreada, de acuerdo con los datos que se indican en la siguiente figura?



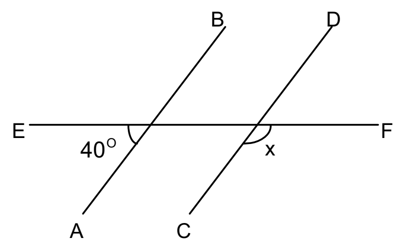
5. ¿Cuántos grados suman los ángulos internos formados por las diagonales principales de un cuadrilátero?

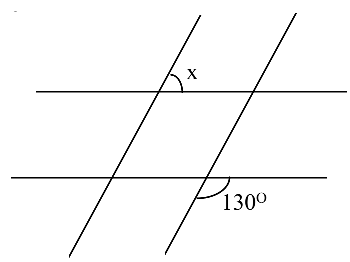
6. ¿Cuántos triángulos rectángulos de lados igual a 2 mts se pueden formar en un rectángulo cuyo ancho es igual a 2 mts y largo 8 mts?

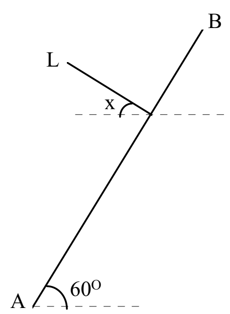
7. En la figura mostrada, las rectas AB y CD son paralelas, ¿cuánto mide el ángulo x?

8. De acuerdo a la siguiente figura, formada por dos pares de rectas paralelas, ¿cuánto mide el ángulo x?

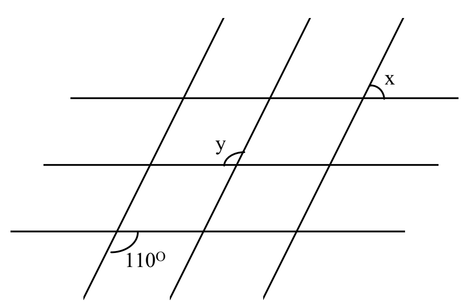
9. ¿Cuál es el valor del ángulo x, formado por la recta L, perpendicular a la recta inclinada AB, si la recta AB forma 60° con la horizontal, tal como se muestra en la figura?







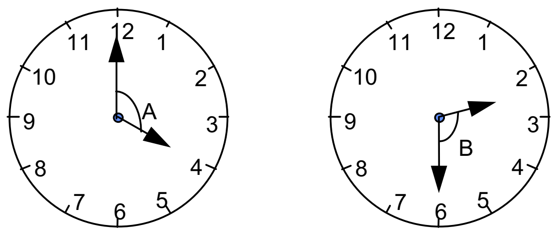
10. Tres rectas horizontales y paralelas se intersectan a su vez con otras tres rectas inclinadas, también paralelas, tal y como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es el valor del ángulo x?

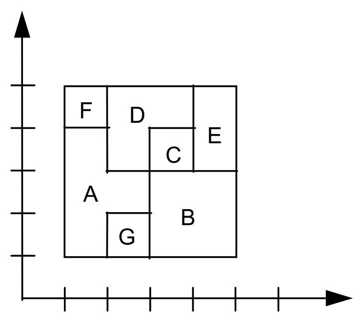
b) ¿Cuál es el valor del ángulo y?

11. Qué relación de orden puede establecerse entre los ángulos A y B, mostrados en la figura?



12. Determine la medida del menor ángulo formado por las manecillas de un reloj que marca las 9:30 exactamente.

13. Observa la siguiente figura y responde a los siguientes planteamientos.



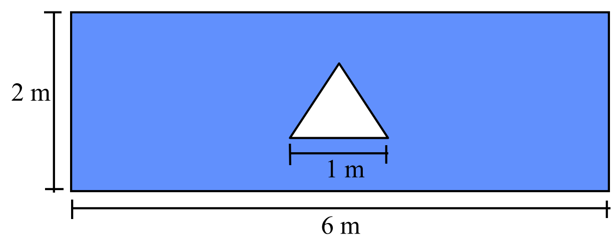
   a) ¿Qué área es mayor, la de la sección A o la de la sección B?
   b) De las secciones A y B, ¿cuál tiene menor perímetro?
   c) ¿Qué sección tiene la misma área que las secciones E y C unidas?
   d) ¿Que relación existe entre los perímetros de las secciones indicadas en el inciso anterior?
   e) Si unimos las secciones A y F y esa unión la comparamos con la región resultante de unir D y E, ¿qué relación existe entre sus áreas y entre sus perímetros?

14. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo, si su largo mide 4 cm y su ancho mide 3 cm?

15. Una parcela rectangular de 300 mts de ancho por 400 mts de largo, fue arada en zurcos diagonales para evitar la erosión excesiva debido a la

pendiente del terreno, ¿cuántos metros lineales tiene el zurco más largo de la parcela?

16. Se va a fabricar una placa de acero en forma rectangular que mida 6 mts de largo por 2 mts de ancho, haciéndole una perforación en forma de triángulo equilátero de lado igual a 1 m., ¿cuántos m^2 de acero se requieren para fabricar dicha placa?



5.4. Respuestas a los ejercicios

Aspectos aritméticos

1. 3
2. -5
3. -10
4. 4
5. Obtén el número total de plazas disponibles en el restaurante y en sus dos secciones, posteriormente, obtén la diferencia entre esas cantidades y las requeridas por los clientes, siendo las respuestas correctas las siguientes:
   a) 8
   b) 12 fumadores de pie en la sección de fumar y 4 lugares vacíos en la sección de no fumar.
6. De acuerdo a la velocidad promedio, el vehículo avanza 100 km. cada hora, el tiempo utilizado para el traslado nos indica que en 5 horas se recorren 500 km., siendo esta cantidad la respuesta correcta.
7. $ 600.00
8. $ 900.00
9. Este ejercicio se puede resolver mediante el uso de la regla de tres, lo cual implica obtener una proporción de una cantidad. Las respuestas correctas son:
   a) 36 litros
   b) 45 quesos y 6 kg. de mantequilla
   c) 4 vacas
10. Ninguno, son iguales.
11. $1\frac{3}{7} < \frac{3}{2}$
12. Rosa es mayor que Juan.
13. $A = B$; $B > C$, donde $A < 0$; por tanto, $A > C$, que es la rspuesta correcta.

14. $\frac{5}{9}$

15. $\frac{1}{3}$

16. $1-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1-\frac{1}{\frac{1}{3}}=1-3=-2$

17. 2

18. Cada uno de los términos es igual al anterior multiplicado por 3. R: 243

19. Esta secuencia se obtiene sumando una unidad, tanto al cociente como al numerador del término anterior. R:$\frac{7}{8}$

20. 9000005

21. 12°

22. Obteniendo el promedio que solicita cada inciso, se obtienen los siguientes resultados:

    a) 30 semillas.
    b) 6004 semillas en promedio al día.
    c) 1,501,000 semillas.
    d) 18 semillas.

Aspectos algebraicos

1. Haciendo una sustitución de valores, se obtiene que $x = 20$.

2. Despejando de la ecuación el valor de x, se obtiene $x = -5$.

3. $x = 10$

4. $\frac{9}{5}$

5. $x = 7$

6. a) -3
   b) 1
   c) 7

7. $4a^7 + 5a^3$

8. Utilizando leyes de exponentes, se llega a la respuesta correcta que es: $x = -1$

9. $\frac{27x^3}{y}$

10. $\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$

11. Se obtiene el peso de cada mesa y se multiplica por la cantidad de mesas deseadas, en este caso, la respuesta correcta es $\frac{10x}{n}$

12. $(A+5)(B-4)$

13. Analizando las características del ejercicio, se obtiene la siguiente ecuación: $x(0.74) + (5)(0.90) = (x+5)(0.84)$ al resolverla, se concluye que se necesitan 3 galones del líquido.

14. Tres números consecutivos pueden ser representados por $A, B\ y\ C$, donde $B = A+1$ y $C = A+2$, como la suma de $A, B\ y\ C$ es 72, se representa así: $A+B+C = 72$ después de sustituir los valores de B y C, se encuentra que los números son $23, 24\ y\ 25$

15. Considerando que A es el número mayor y B es el número menor, se establece el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A+B &= 4B \\ A+15 &= B-13 \end{aligned}$$

al resolver el sistema, se encuentra que los números que cumplen las condiciones del ejercicio son $14, 42$.

16. $x^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{-1}{3}}$

17. $x > x^2$

18. Para resolver este ejercicio, puedes seguir 2 caminos, el primero es sustituir los valores adecuados en las funciones y el segundo, camino, es auxiliarte de la siguiente gráfica

    Las respuestas correctas son:

    a) La mayor es B y la menor es A.

b) B y C tienen el mismo valor y son mayores que A.

c) La mayor es C, A y B son iguales entre si y menores que C.

d) $x = 7$

e) $B < A < C$

f) La función B.

19. *a*) $f(-2) = 0$

    b) $f(0) = -2$

    c) $f(3) = 10$

20. $x_1 = 0$, $x_2 = -3$

21. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

22. $9x^2 - 4y^2$

23. $(2a+7)(2a+7)$ ó $(2a+7)^2$

Aspectos geométricos

1. $A = 24m^2$

2. Las partes sombreadas constituyen triángulos congruentes, dadas las dimensiones de los rectángulos que los contienen, pudiéndose formar dos rectángulos de ancho a y largo b. La respuesta correcta es $2ab$.

3. Considerando que se trata de triángulos de igual base y misma altura: área de un triángulo = $\frac{bh}{2}$

$$\text{área ABC} = \frac{(\overline{AB})(\overline{BC})}{2}$$

$$\text{área ADB} = \frac{(\overline{AB})(\overline{BC})}{2}$$

$$A_{ABC} = A_{ADB}$$

4. Dividiendo la figura sombreada en rectángulos y triángulos se obtiene el resultado igual a $14m^2$.

5. Las diagonales principales de un cuadrilátero forman 4 triángulos, siendo la suma de sus ángulos internos igual a 720°, siendo ésta la respuesta correcta.

6. Dividiendo el rectángulo en cuatro regiones cuadradas de 2×2 mts. y éstas a su vez, con una diagonal principal, se generan 8 triángulos rectángulos.

7. $x = 140°$

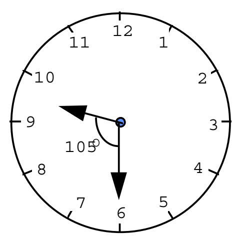
8. Utilizando las propiedades de ángulos correspondientes de rectas paralelas sabemos que el ángulo solicitado es $x = 50°$.

9. 30°

10. Mediante las propiedades de rectas paralelas obtenemos que $x = 70°$ y $y = 110°$.

11. $A > B$

12. Considerando la posición de las manecillas de un reloj, cuando son las 9:30 horas, obtenemos un resultado igual a 105°.



   a) Son iguales.

   b) La sección B.

   c) La sección D.

   d) Son iguales.

   e) Tanto el área como el perímetro son iguales.

13. Utilizando el Teorema de Pitágoras, llegamos a la solución correcta que es, 5 cm.

14. Calculando la longitud de la diagonal de la figura rectangular por medio del Teorema de Pitágoras, dicha diagonal tiene una longitud de 500 mts.

15. Para llegar a la respuesta correcta de este ejercicio, es necesario restar del área del rectángulo el área del triángulo equilátero, podemos obtener la altura de este triángulo mediante el Teorema de Pitágoras, siendo la respuesta correcta: $A = 12 - \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$.